INF 421 — Luc Maranget

Programmer avec les listes

Complexité des tris

Luc.Maranget@inria.fr
http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Luc.Maranget/421/

Programmer avec les listes

- Échauffement
- Tri des listes
  - par insertion,
  - par fusion.
- Programmation objet
  - ensembles persistents,
  - ensembles mutables.

Notre amie, la classe des (cellules de) listes

- Déclaration

```
class List {
  int val ;
  List next ;

  List (int val, List next) {
    this.val = val ;
    this.next = next ;
  }
}
```

- Usage : fabriquer la liste $[1;2;3]$.

```
new List (1, new List (2, new List (3, null)))
```


Opérations élémentaires

Il y en a trois.

- La liste est elle vide ? `p == null`.
- Prendre la tête, `p.val`.
- Prendre la queue, `p.next`.

Boucle idiomatique

Traiter les éléments un par un, *dans l'ordre.*

```
for (List p = ... ; p != null ; p = p.next) {
  ... // p.val est l'élément courant.
}
```

Présentation théorique des listes

- Les listes (de E) sont les solutions de l'équation:

$$L\langle E\rangle = \{\,\emptyset\,\} \cup (E \times L\langle E\rangle)$$

  Ce qui veut simplement dire, une liste est soit la liste vide, soit une paire composée d'un élément et d'uen autre liste.

- Nous notons donc:
  - ▷ La liste vide $\emptyset$,
  - ▷ La liste non-vide $(e; E)$.

Lecture au clavier

Une liste d'entiers lus au clavier (ou dans un fichier), terminée par `Ctrl-d` (fin de fichier).

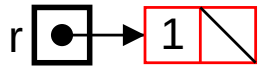
```
class IntReader { // Lecteur des int
  int read() { ... }
  boolean hasNext() { ... }
}

class List {
  ...
  static List lireInts(IntReader in) {
    List r = null ;
    while (in.hasNext()) {
      r = new List (in.read(), r) ;
    }
    return r ;
  }
}
```

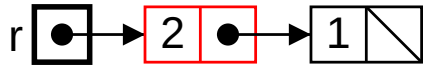

Fonctionnement

Initialement,

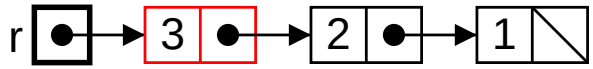
L'utilisateur entre 1,



puis 2,



puis 3,



etc.

En résumé

- L'utilisateur entre les valeurs $i_1, \ldots, i_n$ (et ferme l'entrée standard).
- La boucle construit la liste :

```
...
r = new List(i1, r) // r est null initialement
    ⋮
r = new List(in, r)
...
```

  (Et renvoie `r`.)

- Donc la liste renvoyée est : $[i_n; \ldots; i_1]$.

Retourner une liste

Il y a (au moins) deux façons d'aborder la question.

- On peut procéder comme pour la lecture. Les entiers étant cette fois extraits de la liste à retourner.

```
static List rev(List p) {
   List r = null ;
   while (p != null) { // Tant qu'il y a des entiers...
     r = new List(p.val, r) ;
     p = p.next ;       // Les consommer
   }
   return r ;
}
```

Mieux : Boucle idiomatique.

```
for (; p != null ; p = p.next) {
  r = new List(p.val, r) ;
}
```


Approche récursive

Généralisons le problème (comme souvent).

La methode `revAppend(`$p_1;\ldots;p_n$`,` $q_1;\ldots;q_m$`)` doit renvoyer la liste $p_n;\ldots;p_1;q_1;\ldots q_m$.

Par induction sur la première liste, la fonction R suivante convient.

$$\begin{aligned} R(\emptyset, Q) &= Q \\ R((a;P), Q) &= R(P, (a;Q)) \end{aligned}$$

En notant $\overline{P}$ la liste P retournée, et par hypothèse de récurrence :

$$R(P, (a;Q)) = \overline{P};a;Q$$

Avec $\overline{a;P} = \overline{P};a$ (disons par définition du retournement).

Programmation de R

Les équations :

$$\begin{aligned} R(\emptyset, Q) &= Q \\ R((a;P), Q) &= R(P, (a;Q)) \end{aligned}$$

Le code :

```
static List revAppend(List p, List q) {
  if (p == null) {
    return q ;
  } else {
    return revAppend(p.next, new List(p.val, q)) ;
  }
}

static List rev(List p) {
  return revAppend(p, null) ;
}
```


Élimination de la récursion (terminale)

La boucle,

```
x = x0 ; r = r0 ;
while (P(x)) {
  r = f(x,r) ; x = g(x) ;
}
```

Équivaut à la récursion

```
static ... recLoop(... x, ... r) {
  if (P(x)) {
     return recLoop(g(x), f(x,r)) ;
  } else {
     return r ;
  }
}
  ... r = recLoop(x0, r0) ...
```

Remarquer C'est un complément : aller voir le poly.

Un autre exemple : l'affichage

C'est plus simple, car il n'y a pas de résultat (accumulateur `r`).

- Récursif

```
private static void doPrint(List p) {
  if (p != null) {
    System.out.println(p.val) ;
    doPrint(p.next) ;
  }
}
static print(List p) { doPrint(p) ; } ;
```

(afficher $a; P$ c'est afficher a, puis afficher P.)

- Itératif

```
static void print(List p) {
  for ( ; p != null ; p = p.next) {
    System.out.println(p.val) ;
  }}
```


Encore un exemple : n-ième élement

Récursif

```
static int nth(int i, List p) {
  if (p == null) { throw new Error() ; }
  if (i == 0) {
    return p.val ;
  } else {
    return nth(i-1, p.next) ;
}
```

Itératif: allons nous pouvoir utiliser la boucle idiomatique ? Oui

```
static int nth(int i, List p) {
  for ( ; p != null ; p = p.next) {
    if (i == 0) return p.val ;
    i-- ;
  }
  throw new Error() ;
}
```


À propos

On ne doit pas écrire :

```
for (int i = 0 ; i < length(p) ; i++) {
  int x = nth(i, p) ;
  ...
}
```

Mais plutôt.

```
for (List q = p ; q != null ; q = q.next) {
  int x = q.val ;
  ...
}
```

Pourquoi

- Efficacité (quadratique/linéaire).
- Mais surtout harmonie, le premier code convient aux tableau (accès dit aléatoire) le second aux listes (accès dit séquentiel).

Que retenir ?

La programmation récursive est la plus puissante (et de loin).

Par exemple, afficher à l'envers.

```
static void revPrint(List p) {
  if (p != null) {
    revPrint(p.next) ;
    System.out.println(p.val) ;
  }
}
```

(afficher $a; P$ à l'envers, c'est afficher P à l'envers, puis afficher a.)

Pas de version itérative... simple.

Pourquoi trier ?

- On a parfois tout simplement besoin de trier.
  - Le professeur trie les lignes d'une feuille de calcul (genre Excel), selon les noms des élèves, ou selon les notes obtenues à un examen, selon qu'il veut contrôler qu'aucun élève ne manque, ou classer les élèves.
- Opérer sur des données triées, est parfois, plus simple, plus efficace, ou même plus simple et plus efficace.
  - Par exemple, enlever les doublons d'une liste.
    - ★ Sur une liste triée, il suffit d'un parcours, car les doublons se suivent.
    - ★ Sur une liste non-triée, il faut multiplier les parcours.

Trier une liste simplement

Trions une main à la belote (ou au bridge).

- je prend les cartes dans la main gauche,
- je prend une carte et la met dans ma main droite,
- je prend une carte et la range à sa place dans ma main droite,
- je prend une carte et la range à sa place dans ma main droite,

⋮

- ma main gauche est vide.

L'insertion semble plus simple dans une liste que dans un tableau.

Insertion, équations

Trouver la place où ranger la nouvelle valeur x dans une liste triée

```
static boolean ici(int x, List p) {
  return (p == null || x <= p.val) ;
}
```

Noter : `ici`(x, P) faux entraîne P non-vide.

$$\begin{aligned} I(x,P) &= x;P \quad , \text{ si } \texttt{ici}(x,P) \\ I(x,(a;P)) &= a;I(x,P), \text{ sinon} \end{aligned}$$

Correction :

- Base : Si `ici`(x, P) et P triée, alors $(x; P)$ est triée.
- Induction : Sinon (liste $a; P$ avec $a < x$)
  - a minore P et x, et donc $I(x, P)$.
  - $I(x, P)$ est trié (induction).

Programmation du tri des listes

D'abord le tri en supposant `insert` écrite.

```
static List sort(List p) {
  List r = null ;
  for ( ; p != null ; p = p.next) {
    r = insert(p.val, r) ;
  }
  return r ;
}
```

Et l'insertion.

```
static List insert(int x, List p) {
  if (ici(x,p)) {
    return new List (x, p) ;
  } else { // (p != null) && (x > p.val)
    return new List (p.val, insert(x, p.next)) ;
  }
}
```

Combien ça coûte

Pour une liste de taille (longeur) n.

- La méthode `sort` appelle n fois `insert`,
- En outre, elle est responsable de moins de $k_1 \times n + k_0$ autres opérations (élémentaires, *i.e.* de coût constant).
- Chacun de ces n appels de `insert`(x, p) (p de longeur ℓ) se solde par moins de $k'_1 \times \ell + k'_0$ opérations.
- ℓ vaut 0, 1, $\ldots n-1$.
- Au final le tri s'effectue en moins de

$$k_1 \times n + k_0 + n \times (k'_1 \times n + k'_0)$$

Soit un coût en $O(n^2)$.

La borne $O(n^2)$ est bien serrée (listes triées de tailles croissante).

Combien ça coûte ? II

On peut (plus simplement) compter les comparaisons.

$$n - 1 \leq I(n) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Ici, $I(n)$ est le nombre de comparaisons d'éléments effectuées pour trier une liste de taille n.

Ce résultat donne une indication sensée du temps d'exécution.

- La comparaison est souvent l'opération la plus coûteuse (tri de grandes chaînes).
- On peut affecter un nombre constant d'opérations à chaque comparaison (la borne asymptotique est inchangée).

On peut aussi compter le nombre de cellules de listes allouées.

$$n \leq I(n) \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

Coût en moyenne

Les arguments du tri sont pris dans un espace de probabilité (S).
On calcule l'espérance de la variable aléatoire « coût » (X).

$$E(X) = \sum_{s \in S} p_s X$$

Ici, avec la loi uniforme sur les permutations de n éléments

$$n \leq \hat{I}(n) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Plus précisément, pour les permutations de n éléments *distincts* (voir le poly).

$$\hat{I}(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n - \ln n + O(1)$$

Insertion « en place »

La méthode `insert` précedente n'est pas conforme à l'intuition d'insertion dans un jeu de cartes.

Revenons aux equations

$$\begin{aligned} I(x, P) &= x; P \quad , \text{ si } \texttt{ici}(x, P) \\ I(x, (a; P)) &= a; I(x, P), \text{ sinon} \end{aligned}$$

Et interprétons les ainsi,

Si `ici`(x, P), alors ajouter en tête

Sinon, insérer x dans P`.next`

Par le premier « Si… », la méthode I doit renvoyer une liste. Soit finalement :

Si `ici`(x, P), alors renvoyer $x; P$

Sinon, changer P`.next` en $I(x, P$`.next`$)$ et renvoyer P.

Programmation de l'insertion en place

En bref,

```
static List insert(int x, List p) {
  if (ici(x, p)) { // Ajouter en tête
    return new List (x, p) ;
  } else {         // Insérer dans p.next
    p.next = insert(x, p.next) ;
    return p ;
  }
}
```

Question : Changer le contenu d'une cellule pose-t-il un problème ? non !

Pourquoi ? Il n'y a aucun partage possible des cellules de la liste triée, dont *toutes* les cellules sont créées par `insert` (sont nouvelles)

Insertion en place, itérative

Dans la solution récursive, au plus une seule des affections est utile.

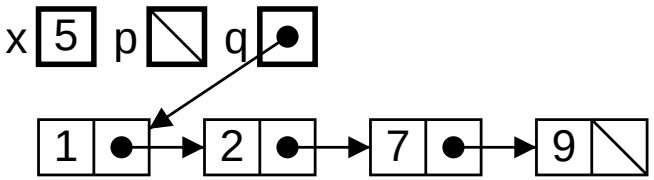
On peut l'éviter ainsi :

```
static List insert(int x, List p) {
  // Cas particulier : insertion en tête.
  if (ici(x,p)) return new List(x, p) ;
  // Cas général, insertion après une cellule.
  List q = p, prev ;
  do {
     prev = q ; q = q.next ;
     // prev est la cellule qui précède q
  } while (!ici(x,q)) ;
  prev.next = new List(x, q) ;
  return p ;
}
```

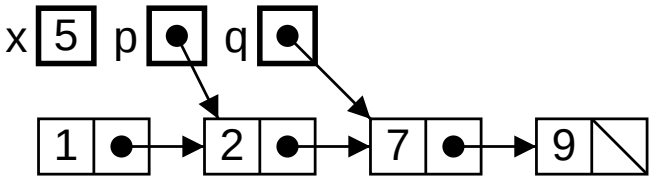
Au fond, c'est exagéré.

Fonctionnement, vision itérative

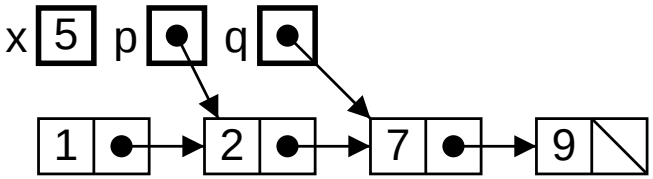
Commencer



Trouver la place (sortie itération)

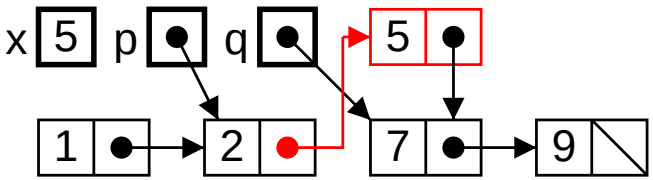


Insérer



Exécuter

```
prev.next = new List (5, q) ;
```



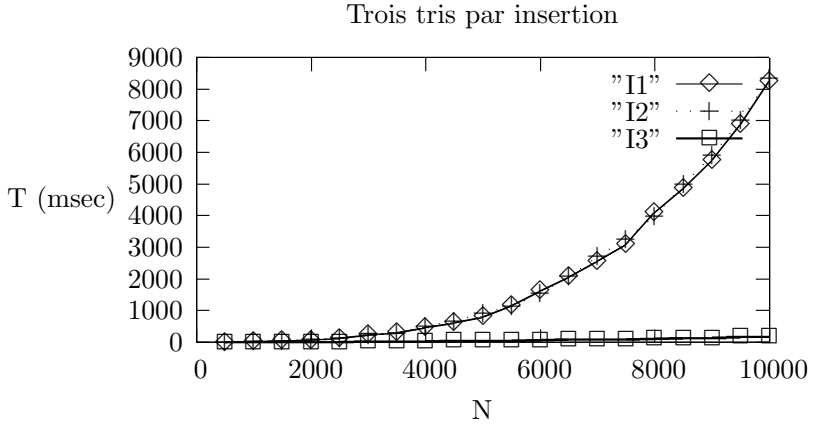
Deux styles de structures de données

- Style persistant ou fonctionnel. C'est à dire : on affecte *jamais* les champs des objets (mais on les initialise).
  - ▷ Plus sûr.
  - ▷ Alloue plus de mémoire (la performance dépend alors crucialement de l'efficacité de l'environnement d'exécution).
- Style destructif, ou mutable, ou non-persistant.
  - ▷ En cas de partage non maîtrisé, les résultats sont surprenants.
  - ▷ En cas de partage absent, ou maîtrisé, peut être intéressant.

Deux styles de programmation

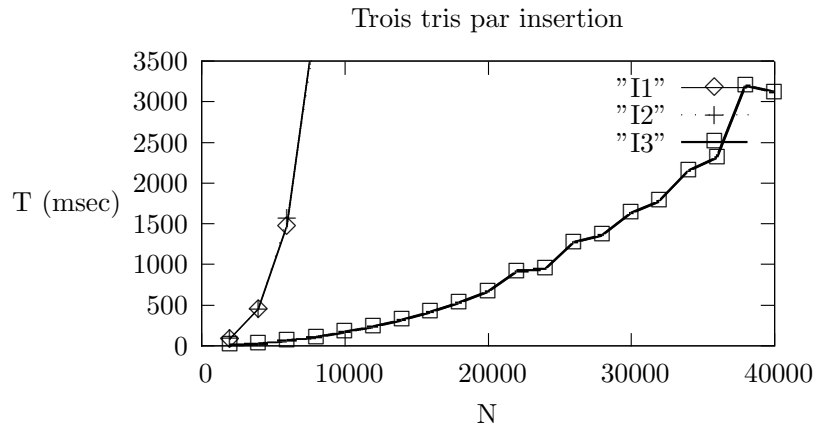
- Récursif
  - ▷ Souvent plus simple à programmer.
- Itératif
  - ▷ Toujours plus efficace (en Java), mais dans une mesure difficile à estimer à l'avance.

Comparaison des trois versions



- I1 et I2 semblent bien en $O(n^2)$.
- I3 (destructif, itératif) est bien plus rapide.

Changement d'échelle



I3 (destructif, itératif) semble bien en $O(n^2)$.

La bonne réaction

Si un programme est trop lent...

Y a-t-il un algorithme plus efficace ?

Pour le tri...

Il y a des algorithmes en $O(n \log n)$.

Fusion des listes triées

Par définition :

La fusion de deux listes triées est une liste triée qui regroupe les éléments des deux listes fusionnées.

Fusion correcte

Soit $M(X, Y)$ la fusion (M pour *merge*).

Équations :

$$\begin{aligned} M(\emptyset, Y) &= Y \\ M(X, \emptyset) &= X \\ M((x;X),(y;Y)) &= x; M(X,(y;Y)) \quad \text{si } x \leq y \\ M((x;X),(y;Y)) &= y; M((x;X),Y) \quad \text{si } y \leq x \end{aligned}$$

Correction : (du troisième cas)

- x minore X (hyp.) et $y;Y$ ($x \leq y$ et hyp.).
- En outre, $M(A, B)$ regroupe les éléments de A et B.
- Et donc x minore $M(X,(y;Y))$.
- Par ailleurs, $M((x;X),(y;Y))$ regroupe les éléments de $(x;X)$ et $(y;Y)$.

Code de la fusion

```
static List merge(List xs, List ys) {
  if (xs == null) {
    return ys ;
  } else if (ys == null) {
    return xs ;
  } // NB: désormais xs != null && ys != null
    else if (xs.val <= ys.val) {
    return new List (xs.val, merge(xs.next, ys)) ;
  } else { // NB: ys.val < xs.val
    return new List (ys.val, merge(xs, ys.next)) ;
  }
}
```

Coût de la fusion

Si $M(n_1, n_2)$ représente le nombre de comparaisons d'éléments.

$$\min(n_1, n_2) \leq M(n_1, n_2) \leq n_1 + n_2$$

Principe du tri fusion

Exemple de la classique méthode « *divide and conquer* ».

- Diviser L en L_1 et L_2.
- Trier L_1 et L_2 independamment (récursion).
- Fusionner L_1 et L_2.

Note : Comment garantir la terminaison ?

- Il faut L_1 et L_2 de taille strictement inférieure à L,
- et donc L de longueur ≥ 2.

Tri fusion, diviser

En un parcours de liste : séparer les pairs des impairs.

```
static List mergeSort(List xs) {
  List ys = null, zs = null ;
  boolean even = true ; // zéro est pair
  for (List p = xs ; p != null ; p = p.next ) {
    if (even) {
      ys = new List (p.val, ys) ;
    } else {
      zs = new List (p.val, zs) ;
    }
    even = !even ; // k+1 a la parité opposée à celle de k
  }
  ⋮
```


Tri fusion, conquérir

```
  ⋮
  if (zs == null) { // xs a zéro ou un élément
    return xs ; // et alors xs est triée
  } else { // Les longueurs de ys et sz sont < à la longueur de xs
    return merge(mergeSort(ys), mergeSort(zs)) ;
  }
}
```

Coût à la louche :

1. Une fusion $\rightarrow n$, soit (au pire) n comparaisons.
2. Deux fusions $\rightarrow n/2$, soit (au pire) n comparaisons.
3. Quatre fusions $\rightarrow n/4$, soit (au pire) n comparaisons.
4. Etc.

Etc. veut dire environ $\log_2(n)$ fois. Au final : $O(n \log n)$.

Plus précisément

Équations du coût (nombre de comparaisons).

$$S(0) = 0 \qquad\qquad S(1) = 0$$

$$S(n) = M(\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor) + S(\lceil n/2 \rceil) + S(\lfloor n/2 \rfloor), \text{ pour } n > 1$$

Soit (encadrer le coût de la fusion).

$$\lfloor n/2 \rfloor + S(\lceil n/2 \rceil) + S(\lfloor n/2 \rfloor) \leq S(n) \leq n + S(\lceil n/2 \rceil) + S(\lfloor n/2 \rfloor)$$

Si $n = 2^{p+1}$ on a la simplification très nette

$$2^p + 2 \cdot S(2^p) \leq S(2^{p+1}) \leq 2^{p+1} + 2 \cdot S(2^p)$$

Et donc (diviser par 2^{p+1}, recurrence $T(p+1) = k + T(p)$).

$$1/2 \cdot p \cdot 2^p \leq S(2^p) \leq p \cdot 2^p$$

Et donc, finalement

En fait, on peut généraliser (voir le poly).

$$1/2 \cdot \log_2(n/2) \cdot n/2 \leq S(n) \leq \log_2(2n) \cdot 2n$$

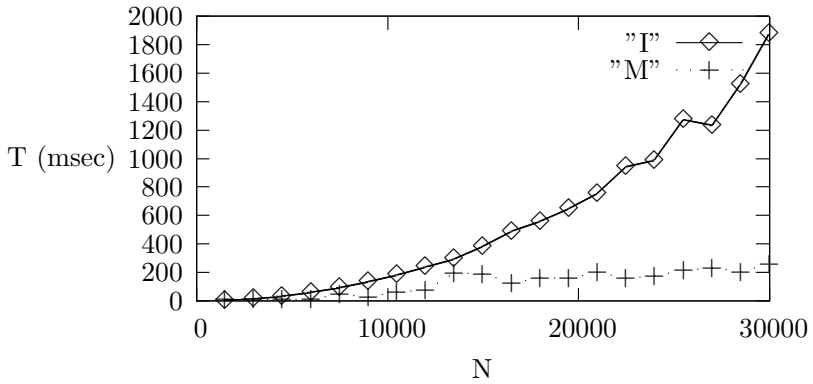
Soit :

$$\begin{aligned} S(n) &= \Theta(n \cdot \log n) \\ \hat{S}(n) &= \Theta(n \cdot \log n) \end{aligned}$$

Le point important Quelque soit la liste, le tri effectue toujours de l'ordre de $n \log n$ comparaisons.

Vérifions l'efficacité

Insertion vs. Merge



I est le tri par insertion le plus efficace. L'accélération est impressionante.

Passer aux grandes listes

On tente de trier des liste de taille $k \times 10000$.

```
N=10000 T=37
N=20000 T=249
N=30000 T=238
Exception in thread "main" java.lang.StackOverflowError
        at List.merge(T.java:148)
        at List.merge(T.java:148)
        at List.merge(T.java:148)
  ⋮
```

J'ai effacé de l'ordre de 200 lignes d'appels de méthodes en attente.

En pratique, le nombre d'appels de méthode qui attendent le résultat d'un appel de méthode est limité.

Or `merge` appelle `merge` qui appelle `merge` qui...

Quelle solution ?

- Dire à Java d'accepter plus d'appels de méthode en attente.

  Solution partielle, et comment faire ?

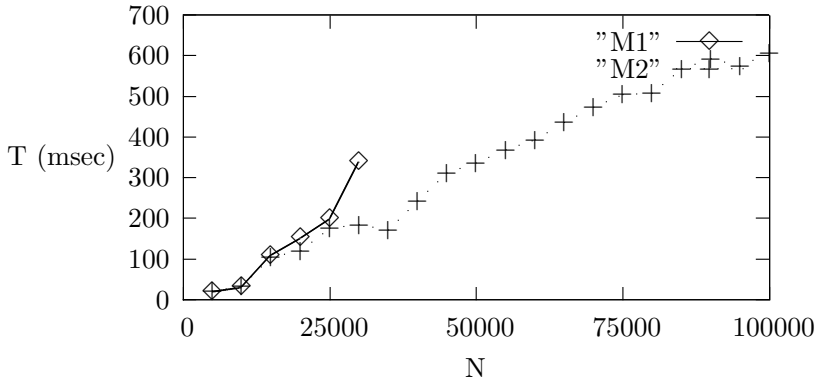
- Programmer différemment

  Solution définitive.

Différemment veut dire sans appel récursif : programmer une fusion itérative (cf. poly 1.3.3).

Performances

Merge vs. Merge



Noter : La courbe M1 est incomplète, en raison de l'échec. Ici programmer itérativement n'est pas une question d'efficacité, mais une nécessité (si on veut trier de grandes listes).

Diversion: static , pas static ?

Slogan :

static $\sim$ La classe, Pas **static** $\sim$ L'objet.

Je veux la représentation décimale de l'entier `x` dans la chaîne `s`.

- Avec méthode statique.

```
String s = Integer.toString(x) ; // Appeler une fonction.
```

- Avec méthode (dynamique, pas statique).

```
Integer ox = new Integer (x) ;   // Fabriquer un objet.
String s = ox.toString() ; // Et invoquer sa méthode.
```


Diversion II: static , pas static ?

- Je code la méthode, à partir de la méthode statique.

```
class Integer {
  private int x ; // Champ privé
  Integer (int x) { this.x = x ; }
  static String toString(int z) { ... }

  String toString() { return toString(this.x) ; }
}
```

- Je code la méthode statique, à partir de la méthode.

```
String toString() { ... }

static String toString(int x)
  { return new Integer(x).toString() ; }
```


Et la programmation objet ?

La programmation des listes vues comme telles, n'a rien d'une programmation « *style objet* ».

Pire, il serait absurde de s'imposer ce style ici.

Mais qu'est-ce que le style objet ?

Exemple, on veut des *objets* d'une classe `Set`, qui offrent :

- Une méthode `add(int x)` pour ajouter un élément.
- Etc.

Par exemple, on ajoute l'élément x à l'ensemble s par

s`.add(`x`)`

Important : Le style objet n'abolit pas la distinction persistant/impératif. Au contraire il permet de la rendre visible.

Ensembles persistants

Ajouter un ou des éléments renvoie un nouvel ensemble.

```
class Set {
  Set () // Construire un ensemble vide
  Set add(int x) // Ajouter l'élément x.
  public String toString() // Comme d'habitude.
}
```

Usage :

```
Set s0 = new Set () ;
Set s1 = s0.add(3) ;
Set s2 = s1.add(1) ;
Set s3 = s2.add(2) ;
```

Important : L'ensemble vide n'est pas **null**.

Ensembles impératifs

Ajouter un ou des éléments modifie l'ensemble.

```
class ISet {
  ISet () // Construire un ensemble vide
  void add(int x) // Ajouter l'élément x.
  public String toString() // Comme d'habitude.
}
```

Usage :

```
ISet s0 = new ISet () ;
s0.add(3) ;
s0.add(1) ;
s0.add(2) ;
```

Important : Les méthodes ne renvoient rien (**void**). C'est la bonne façon de procéder.

Implémentation I

On décide de représenter les ensembles par des listes triées.

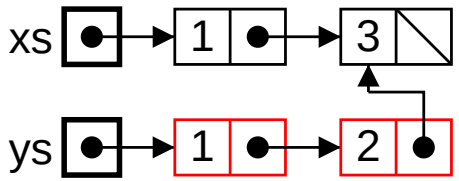
Écrivons une méthode pour ajouter un élément dans un ensemble représenté par une liste triée.

```
// Comme insert, éviter les doublons.
static List add(int x, List xs) {
   if (xs == null) { // Ajouter ici
     return new List(x, xs) ;
   } else if (x < xs.val) { // Ajouter ici aussi
     return new List(x, xs) ;
   else if (x > xs.val) { // Ajouter plus loin
     return new List(xs.val, add(x, xs.next)) ;
   } else { // x == xs.val, déjà là
     return xs ;
   }
}
```

Dans la classe `List`, évidemment.

Effet mémoire

```
List xs = new List(1, new List(3, null)) ;
List ys = List.add(2, xs) ;
```



Implémentation II

La méthode `List.add` fait le vrai travail, reste à « encapsuler ».

```
class Set {
  private List elts ; // Liste des eléments, usage interne.

  Set () { elts = null ; } // Inutile, marque l'intention.
  private Set (List elts) { this.elts = elts ; } // Usage interne.

  Set add(int x) { return new Set (List.add(x, this.elts)) ; }
}

class ISet {
  private List elts ; // Liste des eléments, usage interne.

  ISet () { elts = null ; } // Inutile, marque l'intention.

  void add(int x) { this.elts = List.add(x, elts) ; }
}
```

Avec des listes non-persistantes

Le code de `nadd` se déduit facilement de celui de `add`.

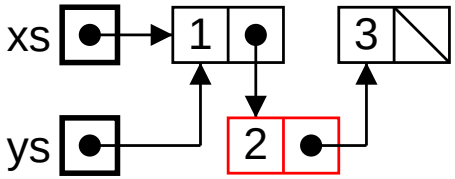
```
static List nadd(int x, List xs) {
   if (xs == null || x < xs.val) { // Ajouter ici
     return new List(x, xs) ;
   else if (x > xs.val) { // Ajouter plus loin
     xs.next = nadd(x, xs.next) ;
     return xs ;
   } else { // x == xs.val, déjà là
     return xs ;
   }
}
```

Noter que `nadd` ne peut pas renvoyer **void**, à cause du cas de l'élément ajouté en tête.

Effet mémoire

```
List xs = new List(1, new List(3, null)) ;
List ys = List.nadd(2, xs) ; // Pas très malin
```

En effet la liste pointée par `xs` a changé !



On peut sans doute se contraindre à écrire.

```
xs = List.nadd(2, xs) ; // Bien plus logique
```

Mais rien n'est contrôlé par Java.

Ensemble impératif, implémenté impérativement

Dans la classe `ISet`.

```
   void add(int x) {
     this.elts = List.nadd(x, this.elts) ;
   }
```

Et grâce à la signature de la méthode **void** `add(..)`, l'utilisateur ne peut pas se tromper : il n'y a qu'un seul ensemble, qui est modifié au cours de sa vie.

L'encapsulage de la structure de donnée non-persistante augmente la sûreté de la programmation.

```
ISet s0 = new ISet () ; s0.add(3) ; s0.add(1) ; s0.add(2) ;
ISet s1 = s0 ;

s0.add(4) ; // Il semble « logique » que s1 change aussi.
```