INF 544 Luc Maranget

Le langage PCF

Luc.Maranget@inria.fr

http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Luc.Maranget/TLP/

A Quelques particularités

- Les fonctions.
- La récursion.

B Un peu de rigueur

- Syntaxe.
- Sémantique à petits pas.
- Sémantique à grands pas.

Un langage fonctionnel

- PCF est un *modèle* de langage de programmation.
  - Dans un modèle, on simplifie, au profit d'un traitement rigoureux et complet de la sémantique.
  - PCF dit ce que les langages fonctionnels (ML, Lisp, Haskell) ont en commun (leur noyau).
- PCF est d'abord un calcul des fonctions.
- Plus quelques constructions « pragmatiques » (genre: l'arithmétique et ses quatre opérations).

Les constructions pragmatiques

L'arithmétique: syntaxe

- Une infinité de constantes: `0`, `1` etc.
- Quatre symboles binaires pour quatre opérations `+`, `-`, `*`, `/`.
- Une conditionnelle, symbole ternaire **Ifz** t_1 **Then** t_2 **Else** t_3.

Nous avons défini un certain ensemble de termes.

L'arithmétique: sémantique

On définit une infinité d'axiomes qui donnent le sens des quatre opérations:

$$\texttt{0+0} \longrightarrow \texttt{0} \qquad \texttt{1+0} \longrightarrow \texttt{1} \qquad \texttt{1+1} \longrightarrow \texttt{2} \qquad \ldots$$

Résumé en:

$$n_1 \ \texttt{op} \ n_2 \longrightarrow n_1 \ \ op \ \ n_2$$

Au passage: la soustraction est limitée aux entiers naturels.
$x - y = 0$ quand $x \leq y$.

Cela revient à supposer que les entiers existent, ce qui est raisonable

Pour la conditionnelle, on précise:

$$\textbf{Ifz } \texttt{0} \textbf{ Then } t_1 \textbf{ Else } t_2 \longrightarrow t_1$$

$\textbf{Ifz } n \textbf{ Then } t_1 \textbf{ Else } t_2 \longrightarrow t_2 \quad (n$ constante entière différente de $\texttt{0})$

Et si les entiers n'existent pas ?

Les définir selon l'arithmétique de Peano:

- Une constante `0` et un symbole unaire `S` (successeur) Deux se note alors `S (S 0)`.
- Des axiomes en nombre fini du genre:

$$\texttt{0} + t \longrightarrow t \qquad\qquad \texttt{S}(t_1) + t_2 \longrightarrow \texttt{S}(t_1 + t_2)$$

$$\ldots \textbf{Ifz } \texttt{0} \textbf{ Then } t_1 \textbf{ Else } t_2 \longrightarrow t_1$$

$$\textbf{Ifz } \texttt{S}(t) \textbf{ Then } t_1 \textbf{ Else } t_2 \longrightarrow t_2$$

Mais bon, on va supposer que les entiers existent.

Une fonction ?

En maths : soit f définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui à n associe $n \times n$.

Parfois écrit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n \times n$.

En PCF:

Fun `n -> n * n`

La différence: la liaison de la variable `n` est explicite.

Ces variables sont *muettes*, on aurait pu écrire:

Fun `x -> x * x`

La variable « muette » est déjà connue:

$$\int_0^1 x^2 dx \qquad \int_0^1 u^2 du \qquad \ldots$$

Que faire avec une fonction ?

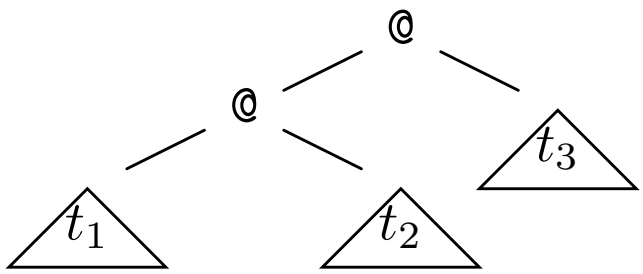
L'appliquer (à un argument) notation $t_1\ t_2$.

```
(Fun x -> x*x) 2
```

L'exécution du terme/programme ci dessus, doit bien renvoyer 4.

Note 1 La notation $t_1\ t_2$ cache l'existence d'un symbole binaire "@" parfois explicité: $@(t_1, t_2)$.

Note 2 L'application « associe à gauche », c'est à dire que $t_1\ t_2\ t_3$ est à comprendre comme $(t_1\ t_2)\ t_3$. Soit:



Sémantique de l'application

Ou plutôt du passage d'argument ou β réduction

$$(\textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t_1)\ t_2 \longrightarrow [t_2 \backslash x] t_1$$

Où la notation $[t_2 \backslash x] t_1$ veut dire: « t_1 où x est remplacé par t_2 » (on y reviendra).

Par exemple:

```
(Fun x -> x*x) 2
```

Devient

```
2*2
```

Qui, comme chacun sait, vaut 4.

Fonctions de première classe

- L'argument d'une fonction peut être une fonction.

  Fun `f -> f 0`

  Appliquée à **Fun** `x -> 1+x` la fonction ci-dessus renvoie: 1.

- Le résultat d'une fonction peut être une fonction.

  Fun `n -> Fun m -> n + m`

  Appliquée à 1, la fonction ci-dessus renvoie: **Fun** `m -> 1+m`, une fonction qui ajoute 1 à son argument.

Remarque : Avec les fonctions qui renvoient des fonctions, on a aussi les fonctions à plusieurs arguments (curryfication).

Exemple classique de fonctions de première classe

La composition.

```
Fun f -> Fun g -> Fun x -> f (g x)
```

Ainsi:

```
(Fun f -> Fun g -> Fun x -> f (g x))
  (Fun n -> n+1)
  (Fun m -> 2*m)
```

Doit valoir (deux β-réductions, sur `f` puis `g`)

```
Fun x -> (Fun n -> n+1) ((Fun m -> 2*m) x)
```

Et donc (deux autres β-réductions, sur `m` puis `n`)

```
Fun x ->  2*x+1
```

Ce qui correspond bien à la composition.

La définition locale

Il est plus clair d'écrire:

```
Let comp = Fun f -> Fun g -> Fun x -> f (g x)) In
Let inc = Fun n -> n+1 In
Let twice = Fun m -> 2*m In
comp inc twice
```

En gros, l'idée c'est:

$$\textbf{Let } x \texttt{ = } t_1 \textbf{ In } t_2 \sim (\textbf{Fun } x \texttt{ -> } t_2)\ t_1$$

Soit comme règle sémantique :

$$\textbf{Let } x \texttt{ = } t_1 \textbf{ In } t_2 \longrightarrow [t_1 \backslash x] t_2$$

La récursion

Comment définir la fonction puissance ($\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$), qui à x et n entiers associe:

$$\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

- En mathématiques (si on évite le $\cdots$ vite ambigu): récurrence.
- Dans les langages de programmation:
  - Boucle (Java):

```
int r = 1 ;
for (int k = 1 ; k <= n ; k++) r := r * x ;
```

  - Définition récursive (Caml):

```
let rec pow x n =
  if n = 0 then 1 else x * pow x (n-1)
```

Définition « par point fixe »

En PCF on définit la fonction `pow` comme égale à

```
Fun x -> Fun n -> Ifz n Then 1 Else x * pow x (n-1)
```

Mais `pow` ne *peut pas* être utilisée dans sa propre définition.

On écrit plutôt p = Φ p avec:

```
Let Φ =
  Fun pow ->
    Fun x -> Fun n -> Ifz n Then 1 Else x * pow x (n-1)
```

À comprendre comme: la fonction p est point fixe de Φ.

On laisse de côté pour le moment la question de l'existence/unicité de ce point fixe et on note :

```
  Fix pow ->
    Fun x -> Fun n -> Ifz n Then 1 Else x * pow x (n-1)
```

Réduction du Fix

Un moyen de contourner l'existence/unicité : définir l'effet du **Fix**.

$$\textbf{Fix}\ x\ \texttt{->}\ t \longrightarrow [\textbf{Fix}\ x\ \texttt{->}\ t\backslash x]t$$

L'idée est en fait très simple:

`(`**Fix** `fact -> Fun n -> Ifz n Then 1 Else n*fact (n-1)) 3`

Règle du **Fix**, remplacer `fact` par **Fix** `fact ->` ....

`(`**Fun** `n -> Ifz n Then 1 Else n * (`**Fix** `fact -> ...) (n-1)) 3`

β-règle (remplacer `n` par `3`).

Ifz `3` **Then** `1` **Else** `3 * (`**Fix** `fact -> ...) (3-1)`

Comme `3` n'est pas nul, et que `3-1` vaut `2`:

`3 * (`**Fix** `fact -> ...) 2`

Soit en gros `3 * fact 2` c'est gagné. Au final `3 * 2 * 1 * 1`.

Un peu de rigueur: syntaxe

Les termes de PCF sont définis, par

- Une infinité de constantes `0`, `1`, etc.
- Quatre symboles d'opération `+`, `-`, `*`, `/` (binaires, notés de façon infixe dans les termes t_1 `+` t_2).
- Un symbole ternaire (**Ifz**, notation des termes **Ifz** t_1 **Then** t_2 **Else** t_3).
- Un ensemble de variables.
- Le symbole binaire de fonction, termes notés **Fun** x `->` t (le premier argument est une variable, liée dans t).
- Le symbole binaire du point fixe, termes notés **Fix** x `->` t.
- La définition, ternaire, termes notés **Let** x `=` t_1 **In** t_2.

Syntaxe abstraite de PCF

```
type var = string

type op = Add | Sub | Mul | Div

type t =
  | Num of int
  | Var of var
  | Op  of op * t * t
  | Ifz of t * t * t
  | Let of var * t * t
  | App of t * t
  | Fun of var * t
  | Fix of var * t
```

Un peu de rigueur: sémantique

Le but est de définir une relation $t \hookrightarrow v$ entre les programmes (termes de PCF) et leur valeurs.

Base de départ, six axiomes de réduction élémentaires:

$$(\textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t_1)\ t_2 \longrightarrow [t_2 \backslash x]t_1 \qquad \textbf{Let}\ x\ \texttt{=}\ t_1\ \textbf{In}\ t_2 \longrightarrow [t_1 \backslash x]t_2$$

$$\textbf{Fix}\ x\ \texttt{->}\ t \longrightarrow [(\textbf{Fix}\ x\ \texttt{->}\ t) \backslash x]t \qquad \textbf{Ifz}\ \texttt{0}\ \textbf{Then}\ t_1\ \textbf{Else}\ t_2 \longrightarrow t_1$$

$$\textbf{Ifz}\ n\ \textbf{Then}\ t_1\ \textbf{Else}\ t_2 \longrightarrow t_2\ (n \neq \texttt{0}) \qquad n_1\ \texttt{op}\ n_2 \longrightarrow n_1\ op\ n_2$$

Sémantique « à petits pas »

- Les termes réductibles ou *radicaux*. Ex. `1 + 1`, `(`**`Fun`** `x -> x + x) y`.

  Contracter un radical (règle $t_1 \longrightarrow t_2$) c'est remplacer t_1 par t_2. Ex. `2`, `y + y`.

- Plus « Passage au contexte »: contracter les radicaux dans les termes.

$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{t_1\ t_2 \longrightarrow t_1'\ t_2} \qquad \frac{t_2 \longrightarrow t_2'}{t_1\ t_2 \longrightarrow t_1\ t_2'}$$

$$\frac{t \longrightarrow t'}{\textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t \longrightarrow \textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t'} \qquad \ldots$$

Sémantique à petits pas

- Rappel ? La fermeture réflexive-transitive $\mathcal{R}^*$ d'une relation $\mathcal{R}$.

$$t\ \mathcal{R}\ t \qquad \frac{t_1\ \mathcal{R}\ t_2}{t_1\ \mathcal{R}^*\ t_2} \qquad \frac{t_1\ \mathcal{R}^*\ t_2 \qquad t_2\ \mathcal{R}^*\ t_3}{t_1\ \mathcal{R}^*\ t_3}$$

- Les valeurs v sont définies comme les termes irréductibles (ou formes normales)

$$v \in \mathcal{NF} \Leftrightarrow \nexists w, v \longrightarrow w$$

- Définition de la sémantique $t \hookrightarrow v$ ssi:

$$t \longrightarrow^* v \text{ et } v \in \mathcal{NF}$$

Autrement dit: réduire les radicaux de t, jusqu'à plus soif.

Exemples

Valeur de :

- **Fix** `x -> x` ? Pas de valeur car $t \longrightarrow t$ et pas le choix.
- `(`**Fun** `y -> 3) 2` ? `3` en une β-réduction.
- `(`**Fun** `y -> 3) (`**Fix** `x -> x)` ? `3` en une β-réduction, si on est malin,
- **Fix** `n -> 1+n` ? Pas de valeur, réduction de t sur `1+`t, `1+(1+`t`)`, `1+(1+(1+`t`))`, etc.

Exemple plus sérieux

Let `pow2 = ` **Fix** `p -> ` **Fun** `n -> ` **Ifz** `n ` **Then** `1 ` **Else** `2 * p (n-1) ` **In**
`pow2 2`

Réduire liaison:

(Fix `p -> ` **Fun** `n -> ` **Ifz** `n ` **Then** `1 ` **Else** `2 * p (n-1)) 2`

Notons $P =$ **Fix** `p ->` $\cdots$. Réduire point fixe:

(Fun `n -> ` **Ifz** `n ` **Then** `1 ` **Else** `2 *` P `(n-1)) 2`

β-réduction.

Ifz `2 ` **Then** `1 ` **Else** `2 *` P `(2-1)`

`2 *` P `(2-1)`

`2 *  (`**Fun** `n -> ` **Ifz** `n ` **Then** `1 ` **Else** `2 *` P `(n-1)) (2-1)`

`2 *  (`**Ifz** `2-1 ` **Then** `1 ` **Else** `2 *` P `((2-1)-1))`

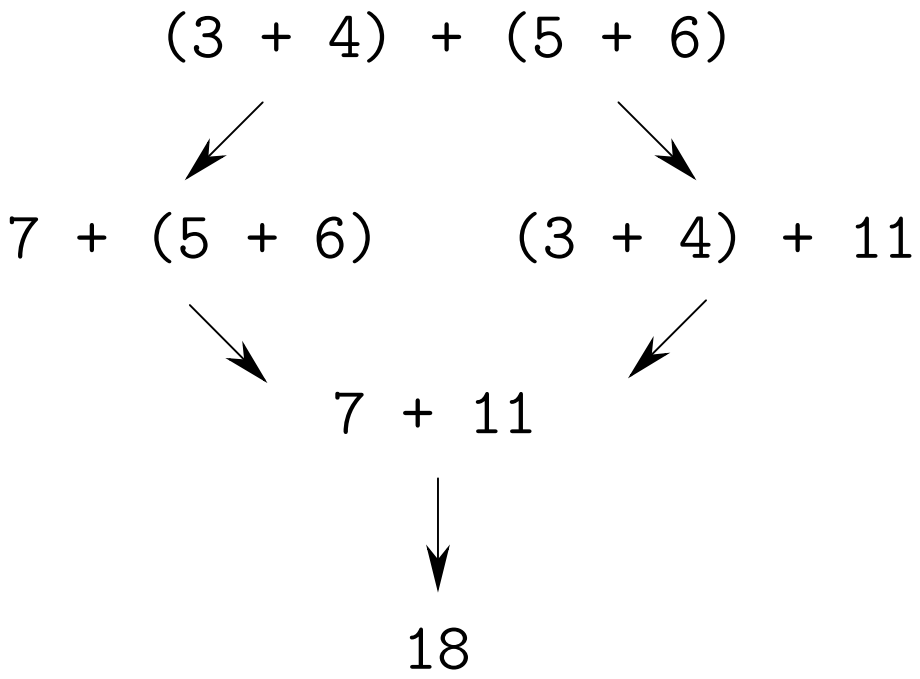
```
2 *  (Ifz 1 Then 1 Else 2 * P ((2-1)-1))

2 *  (2 * P ((2-1)-1))

2 *  (2 * ((Fun n -> Ifz n Then 1 Else 2 * P (n-1)) ((2-1)-1)))

2 *  (2 * (Ifz ((2-1)-1) Then 1 Else 2 * P (((2-1)-1)-1))

2 *  (2 * (Ifz (1-1) Then 1 Else 2 * P (((2-1)-1)-1))

2 *  (2 * (Ifz 0 Then 1 Else 2 * P (((2-1)-1)-1))

2 *  (2 * 1)
```

Deux multiplications, ouf 4.

Le déterminisme

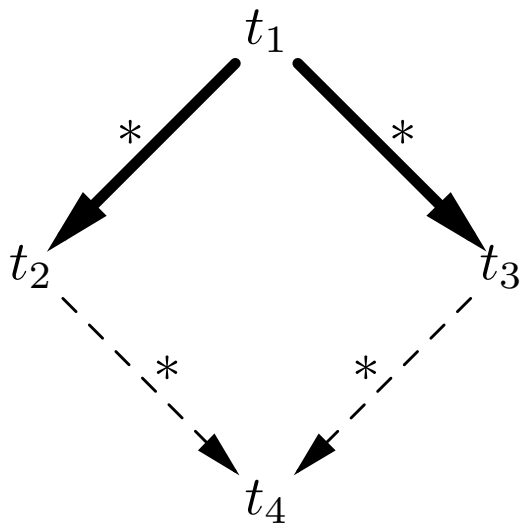
Dans un terme, il peut y avoir plusieurs radicaux. La réduction opère donc un choix.

Ce choix a-t-il un impact ? Les valeurs (formes normales) sont elles uniques ?)



Confluence

L'unicité des formes normales découle du résultat plus fort de *confluence* (Théorème, admis).



Qui dit en gros,

- Deux calculs divergents (t_2 ou t_3).
- Ne le sont jamais définitivement (il existe t_4).

Retour sur la substitution

On a dit : $[t_1 \backslash x]t_2$ = remplacer x par t_1 dans t_2.

La substitution donne le sens des variables.

Elle permet aussi de donner un sens aux expressions qui possèdent des variables libres (ou non-closes).

Par ex. `x+1`. possède un sens clair dès que l'on donne une valeur à `x`.

Rappel ? définition des variables libres

$$\mathcal{F}(n) = \emptyset \qquad \mathcal{F}(x) = \{\, x \,\} \qquad \mathcal{F}(t_1 \ \texttt{op}\ t_2) = \mathcal{F}(t_1) \cup \mathcal{F}(t_2)$$

$$\mathcal{F}(t_1\ t_2) = \mathcal{F}(t_1) \cup \mathcal{F}(t_2) \qquad \mathcal{F}(\textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t) = \mathcal{F}(t) \setminus \{\, x \,\}$$

$$\mathcal{F}(\textbf{Fix}\ x\ \texttt{->}\ t) = \mathcal{F}(t) \setminus \{\, x \,\}$$

$$\mathcal{F}(\textbf{Let}\ x\ \texttt{=}\ t_1\ \textbf{In}\ t_2) = \mathcal{F}(t_1) \cup (\mathcal{F}(t_2) \setminus \{\, x \,\})$$

Remplacer x **par** t_1

Est-ce si simple ? En l'absence de lieurs, oui.

$[t\backslash x]x = t \qquad [t\backslash x]y = y \qquad [t\backslash x](t_1 \ \texttt{op} \ t_2) = ([t\backslash x]t_1) \ \texttt{op} \ ([t\backslash x]t_2)$

$[t\backslash x](t_1 \ t_2) = ([t\backslash x]t_1) \ ([t\backslash x]t_2) \qquad [t\backslash x](\textbf{Ifz} \ t_1 \ \textbf{Then} \ t_2 \ \textbf{Else} \ t_3) =$

$$\textbf{Ifz} \ [t\backslash x]t_1 \ \textbf{Then} \ [t\backslash x]t_2 \ \textbf{Else} \ [t\backslash x]t_3$$

Soit par exemple,

$$[t\backslash \texttt{x}](\texttt{x + y}) = t \ \texttt{+ y}$$

En présence de lieurs

La substitution donne la valeur des variables *libres*. On propose donc:

$$[t\backslash x](\textbf{Fun } x \texttt{ -> } t_1) = \textbf{Fun } x \texttt{ -> } t_1$$

$$[t\backslash x](\textbf{Fun } y \texttt{ -> } t_1) = \textbf{Fun } y \texttt{ -> } [t\backslash x]t_1 \qquad \text{etc.}$$

Let `y = `t **In Fun** `x -> x + y`

En substituant...

- Si t est `4` on a **Fun** `x -> x + 4`.
- Si t est `z` on a **Fun** `x -> x + z`.
- Si t est `x` a-t-on **Fun** `x -> x + x` ?

  Il ne vaut mieux pas ! Considérer la confluence de:

  Let `x = 1 in` **Let** `y = x in` **Fun** `x -> x + y`

Alpha-équivalence

Dans l'exemple [x\y](**Fun** `x -> x + y`), nous sommes victimes de la *capture* de la variable libre `x`, qui devient liée en traversant la liaison **Fun** `x ->` ...

Or

- Si l'argument de la fonction est nommé `z` on peut substituer :

$$[\texttt{x\y}](\textbf{Fun}\ \texttt{z -> z + y}) = \textbf{Fun}\ \texttt{z -> z + x}.$$

- Les fonctions **Fun** `x -> x + y` et **Fun** `z -> z + y` sont les mêmes (changement de la variable muette).

L'alpha-équivalence est l'égalité modulo le changement des variables muettes.

On considère les termes « modulo alpha-équivalence ».

Une définition de la substitution

Choisir un bon représentant des classes d'alpha-équivalence.

$$[t\backslash x](\textbf{Fun}\ y\ \texttt{->}\ t_2) = \textbf{Fun}\ z\ \texttt{->}\ [t\backslash x]([z\backslash y]t_2)$$

$$[t\backslash x](\textbf{Fix}\ y\ \texttt{->}\ t_2) = \textbf{Fix}\ z\ \texttt{->}\ [t\backslash x]([z\backslash y]t_2)$$

$$[t\backslash x](\textbf{Let}\ y\ \texttt{=}\ t_1\ \textbf{In}\ t_2) = \textbf{Let}\ z\ \texttt{=}\ [t\backslash x]t_1\ \textbf{In}\ [t\backslash x]([z\backslash y]t_2)$$

Où z est tel que $z \notin \mathcal{F}(t)$ (éviter capture vue) et $z \notin \mathcal{F}(t_2)$ (éviter autre capture).

Plus les définitions pour les symboles sans lieurs (page 27).

Sémantique et exécution de programme

Dans un terme, il peut y avoir un choix de radicaux.

- On veut modéliser le calcul d'un ordinateur déterministe.
- Or, certains choix de radicaux de réduction calculent la forme normale, d'autres non.

```
Let loop = Fix f -> Fun x -> f x In
Let k = Fun x -> Fun y -> y In
k (loop 0) 1
```

  La sémantique doit répondre à : vaut `1` ou ne termine pas ?

- En outre, peu d'intérêt à distinguer:

```
Fun x -> x + 11          Fun x -> x + (7+4)
```

- En outre, toutes les variables d'un programme ont une définition.

Programmes et réduction faible

1. Dans un programme, il n'y a pas d'inconnu : on ne réduit que des termes clos.
2. Les fonctions sont des fonction et point.

On réduit des termes clos et on *utilise jamais* la règle :

$$\frac{t \longrightarrow t'}{\textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t \longrightarrow \textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t'}$$

Tout cela revient à définir les valeurs v ainsi :

- Une constante entière n.
- Ou bien une fonction **Fun** x `->` t (t terme quelconque, avec $\mathcal{F}(t) \subseteq \{\, x \,\}$).

Une stratégie

C'est une sous-relation ($\Rightarrow$, $\subseteq$) déterministe de la relation de réduction ($\longrightarrow$).

Définissons « l'appel par nom », dont la principale caractéristique est de ne pas réduire les arguments des fonctions.

Les axiomes ne changent pas (voir slide 18).

$$\frac{t_1 \longrightarrow_n t_1'}{t_1\ t_2 \longrightarrow_n t_1'\ t_2}$$

$$\frac{t_1 \longrightarrow_n t_1'}{t_1\ \texttt{op}\ t_2 \longrightarrow_n t_1'\ \texttt{op}\ t_2} \qquad \frac{t_2 \longrightarrow_n t_2'}{v_1\ \texttt{op}\ t_2 \longrightarrow_n v_1\ \texttt{op}\ t_2'}$$

$$\frac{t_1 \longrightarrow_n t_1'}{\textbf{Ifz}\ t_1\ \textbf{Then}\ t_2\ \textbf{Else}\ t_3 \longrightarrow_n \textbf{Ifz}\ t_1'\ \textbf{Then}\ t_2\ \textbf{Else}\ t_3}$$

Autre présentation

Le radical réduit est le plus extérieur (et le plus à gauche).

$$\mathcal{R}_n\ (t) = t,\ \text{si } t \text{ radical} \qquad \mathcal{R}_n\ (t_1\ t_2) = \mathcal{R}_n\ (t_1)$$

$$\mathcal{R}_n\ (\textbf{Ifz}\ t_1\ \textbf{Then}\ t_2\ \textbf{Else}\ t_3) = \mathcal{R}_n\ (t_1)$$

$$\mathcal{R}_n\ (v\ \ \texttt{op}\ \ t) = \mathcal{R}_n\ (t) \qquad \mathcal{R}_n\ (t_1\ \ \texttt{op}\ \ t_2) = \mathcal{R}_n\ (t_1)$$

- Une étape: contracter $\mathcal{R}_n\ (t)$.
- Itérer $(\longrightarrow_n^*)$ jusqu'à trouver une valeur.

Présentation directe de l'appel par nom

En sémantique dite à grands pas, ou naturelle.

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_n \textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t_3 \qquad [t_2 \backslash x]t_3 \hookrightarrow_n v}{t_1\ t_2 \hookrightarrow_n v}$$

$$\textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t \hookrightarrow_n \textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t$$

$$\frac{[t_1 \backslash x]t_2 \hookrightarrow_n v}{\textbf{Let}\ x\ \texttt{=}\ t_1\ \textbf{In}\ t_2 \hookrightarrow_n v} \qquad \frac{[(\textbf{Fix}\ x\ \texttt{->}\ t) \backslash x]t \hookrightarrow_n v}{\textbf{Fix}\ x\ \texttt{->}\ t \hookrightarrow_n v}$$

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_n \texttt{0} \qquad t_2 \hookrightarrow_n v}{\textbf{Ifz}\ t_1\ \textbf{Then}\ t_2\ \textbf{Else}\ t_3 \hookrightarrow_n v} \qquad \frac{t_1 \hookrightarrow_n n (n \neq \texttt{0}) \qquad t_3 \hookrightarrow_n v}{\textbf{Ifz}\ t_1\ \textbf{Then}\ t_2\ \textbf{Else}\ t_3 \hookrightarrow_n v}$$

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_n n_1 \qquad t_2 \hookrightarrow_n n_2}{t_1\ \texttt{op}\ t_2 \hookrightarrow_n n_1\ op\ n_2} \qquad n \hookrightarrow_n n$$

Quelle présentation choisir ?

On préfère souvent la sémantique naturelle plus concise, en particulier pour programmer un évaluateur (TP).

Mais, ne dit rien des termes qui ne terminent pas, ne dit rien des termes « bloqués » (ex. `1` appliqué à `2`).

Les résultats théoriques sont donc plus précis en sémantique par petit pas.

Équivalences (admises)

- Si $t \hookrightarrow_n v$, alors $t \longrightarrow_n^* v$.
- Si $t \longrightarrow_n^* v$ (v valeur), alors $t \hookrightarrow_n v$.

Une autre stratégie : l'appel par valeur

Par rapport à l'appel par nom, deux règles changent :

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_n \textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t_3 \qquad [t_2 \backslash x]t_3 \hookrightarrow_n v}{t_1\ t_2 \hookrightarrow_n v} \qquad \frac{[t_1 \backslash x]t_2 \hookrightarrow_n v}{\textbf{Let}\ x\ \texttt{=}\ t_1\ \textbf{In}\ t_2 \hookrightarrow_n v}$$

Deviennent

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_v \textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t_3 \qquad t_2 \hookrightarrow_v v_2 \qquad [v_2 \backslash x]t_3 \hookrightarrow_v v}{t_1\ t_2 \hookrightarrow_v v}$$

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_v v_1 \qquad [v_1 \backslash x]t_2 \hookrightarrow_v v}{\textbf{Let}\ x\ \texttt{=}\ t_1\ \textbf{In}\ t_2 \hookrightarrow_v v}$$

Note : Les arguments sont réduits avant la substitution.

Appel par valeur

Parfois caractérisé comme « contracter le radical le plus profond » (et le plus à gauche). Ce n'est pas tout à fait exact.

- Le **Ifz** ne change pas. Autrement dit on ne *remplace pas*

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_n \mathsf{0} \qquad t_2 \hookrightarrow_n v_2}{\textbf{Ifz } t_1 \textbf{ Then } t_2 \textbf{ Else } t_3 \hookrightarrow_n v_2}$$

  par

$$\frac{t_1 \hookrightarrow_v \mathsf{0} \qquad t_2 \hookrightarrow_v v_2 \qquad t_3 \hookrightarrow_v v_3}{\textbf{Ifz } t_1 \textbf{ Then } t_2 \textbf{ Else } t_3 \hookrightarrow_v v_2}$$

- Autrement dit, il reste un peu d'appel par nom.

Idem pour **Fix** x `->` t. Le termes t n'est pas réduit, même si il contient un radical « plus profond ».

Manque d'expressivité de l'appel par valeur

On définit (**Let**) la function `fi`.

Fun `x` `->` **Fun** `y` `->` **Fun** `z` `->` **Ifz** `x` **Then** `z` **Else** `y`

- En appel par nom, on a l'équivalence :

$$\texttt{fi}\ t_1\ t_2\ t_3 \hookrightarrow_n v \Leftrightarrow \textbf{Ifz}\ t_1\ \textbf{Then}\ t_3\ \textbf{Else}\ t_2 \hookrightarrow_n v$$

- Mais pas en appel par valeur. Considérer :

  Ifz `0` **Then** `1` **Else** `(`**Fix** `x` `->` `x)`

  Et

  `fi 0 (`**Fix** `x` `->` `x) 1`

  Noter :

  Fix `x` `->` `x` $\rightarrow$ **Fix** `x` `->` `x` $\rightarrow$ **Fix** `x` `->` `x` $\rightarrow \cdots$

Comparaison des stratégies

Appel par nom : Algol 60, Haskell. Appel par valeur : tout les autres langages (ML).

On démontre :

- Que l'appel par nom est *sûr*.

$$(t \longrightarrow^* v) \Rightarrow (t \hookrightarrow_n v)$$

  Exemple simple :
  `(Fun x -> Fun y -> y) (Fix x -> x) 1`

- Que l'appel par nom autorise les transformations de programme arbitraires.

$$t \longrightarrow^* t' \Rightarrow (t \hookrightarrow_n v \Leftrightarrow t' \hookrightarrow_n v')$$

  Avec $v = v'$ pour les entiers, $v \longleftrightarrow^* v'$ en gal.

On constate que l'appel par valeur est plus facile à comprendre.

- TP, divers évaluateurs.
- La prochaine fois, interprétation.