N° d'ordre:

THÈSE

DE

DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS VII

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

Jean-Jacques LÉVY

Spécialité: Mathématiques

Mention: Informatique Algébrique

RÉDUCTIONS CORRECTES ET OPTIMALES DANS LE LAMBDA-CALCUL

Soutenue le 17 janvier 1978 devant la Commission composée de:

MM	L.	NOLIN	Président
	H	BARENDREGT	Examinateurs
	J.-Y.	GIRARD	
	G.	HUET	
	M.	NIVAT	
	J.-C.	SIMON	
	J.	VUILLEMIN	
	G.	KAHN	Invité

INTRODUCTION

En se gardant bien d'avoir le point de vue de Sirius, on peut dire qu'il y a deux sortes de λ-calculistes : les logiciens et les informaticiens. A défaut de pouvoir nous classer dans la première catégorie, nous appartenons résolument à la deuxième sorte, car le λ-calcul, quoique inventé par les logiciens, a un intérêt certain pour les informaticiens.

1) Le λ-calcul : modèle de certains langages de programmation :

Le λ-calcul, introduit par Church, est un système formel permettant de définir des fonctions, éventuellement partielles, à partir d'un certain nombre de fonctions élémentaires. Mais, à la différence des fonctions habituellement manipulées, les fonctions du λ-calcul n'ont pas d'arités, c'est-à-dire de nombres fixes d'arguments. De plus, le système est combinatoirement complet, c'est-à-dire qu'il n'introduit aucune restriction de type sur le domaine des arguments d'une fonction. On pourra notamment appliquer une fonction f à n'importe quel argument, donc à elle-même, et considérer l'objet f(f).

Formellement, le λ-calcul est constitué d'un ensemble de λ-expressions et d'un certain nombre de règles de conversion. L'ensemble des <u>λ-expressions</u> construites sur un ensemble $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ de constantes et un ensemble $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de variables est l'ensemble Λ minimal contenant V et C qui est clos par les deux opérations suivantes :

- <u>l'application</u> : si M et N sont dans Λ, alors (MN) est une λ-expression qui représente l'application de M à N.

- <u>l'abstraction par rapport à une variable</u> : si x est une variable de V et M une expression de Λ, alors $(\lambda x\cdot M)$ est une λ-expression, dont les variables sont exactement celles de M sauf x, qui représente l'abstraction de M par rapport à x.

Intuitivement, l'expression $(\lambda x \cdot M)$ représente M en tant que fonction de x et on veut donc que $((\lambda x \cdot M)x)$ et M représentent un même objet (voir Barendregt). Ceci est effectué en introduisant une règle de conversion, appelée β-conversion par Church. Par cette règle, toute sous-expression de la forme $((\lambda x \cdot M)N)$ d'une expression P peut être remplacée par la sous-expression $M[x \backslash N]$, c'est-à-dire par M où toutes les occurences de la variable x sont substituées par N ; ce qui donne une expression Q et nous ecrirons $P \to Q$ cette opération de conversion. Par exemple, si C contient le symbole + et l'ensemble N des entiers naturels, si x et y sont des variables de V et si $x + y$ est une abréviation de la λ-expression $((+ x)y)$, nous avons les conversions suivantes :

$$((\lambda x \cdot x + y)1) \to 1 + y$$

$$((\lambda y \cdot x + y)2) \to x + 2$$

$$((\lambda x \cdot x + x)3) \to 3 + 3$$

$$(((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot x + y))4)5) \to ((\lambda y \cdot 4 + y)5) \to 4 + 5$$

Nous avons dit que x n'est pas une variable de $(\lambda x \cdot M)$. On dit aussi que x est une variable liée de $(\lambda x \cdot M)$, ce qui amène à faire une distinction entre les vraies variables ou variables libres et les variables muettes ou liées d'une expression. Les variables liées sont utilisées couramment en mathématiques, par exemple dans la notation intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ ou en logique avec un quantificateur $\forall x \cdot P(x,y)$, $\exists y \cdot Q(x,y)$. Leur comportement est identique dans le λ-calcul. Le nom d'une variable liée n'a pas d'importance et, par exemple, les expressions $(\lambda x \cdot x + y)$ et $(\lambda z \cdot z + y)$ sont identiques. Toutefois, il faut faire attention dans un certain nombre de cas ; par exemple $(\lambda x \cdot x + y)$ et $(\lambda y \cdot y + y)$ ne sont pas identiques et dans $M[x \backslash N]$, aucune variable libre de N ne doit devenir liée dans $M[x \backslash N]$. Cela peut se traduire formellement et nous aurons par exemple les conversions suivantes :

$$(((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot x + y))y)x) \rightarrow ((\lambda z \cdot y + z)x) \rightarrow y + x$$

Remarquons également que l'exemple précédent considère en fait l'expression x + y comme une fonction des deux arguments x et y. En effet, dans le λ-calcul, comme l'abstraction ne permet que de définir des fonctions unaires, on représente toute fonction de n arguments par une succession de fonctions unaires. Ainsi, l'expression M en tant que fonction des n variables x_1, x_2,...x_n est représentée par :

$$(\lambda x_1 \cdot (\lambda x_2 \cdot (\ldots(\lambda x_n \cdot M)\ldots)))$$

et l'application d'une fonction f à n arguments x_1, x_2...x_n est représentée par :

$$((\ldots((fx_1)x_2)\ldots)x_n)$$

On peut vérifier que $((\ldots((Fx_1)x_2)\ldots)x_n)$ se convertit en M si $F = (\lambda x_1 \cdot (\lambda x_2 \cdot (\ldots(\lambda x_n \cdot M)\ldots)))$ et cela rend cohérent ce mécanisme de représentation des fonctions à plusieurs arguments attribué par Church à Schönfinkel et encore connu dans la littérature sous le nom de Curryfication (voir par exemple Milner).

Church considère d'autres règles de conversion. Ici, nous ne considérerons que la β-conversion précédemment décrite. Cette règle formalise donc le passage d'un argument à une fonction ou abstraction. Toute suite, éventuellement vide, de conversions est encore appelée une <u>réduction</u> et une réduction entre deux expressions P et Q est notée $P \overset{*}{\rightarrow} Q$. Remarquons que, puisqu'il n'y a aucune restriction sur la formation d'application ou d'abstraction, le λ-calcul permet de décrire des fonctions ou fonctionnelles dont les arguments et les valeurs peuvent être des fonctions. Cela permet à certaines réductions d'être plus complexes que celles que nous avons vues dans les exemples précédents.

Par exemple, si on pose $\Delta = (\lambda x\cdot(xx))$, $F = (\lambda x\cdot(f(xx)))$ et $Y_f = (FF)$, on a

$$(\Delta\Delta) \to (\Delta\Delta) \to (\Delta\Delta) \to \ldots$$

$$(\Delta(\lambda x\cdot(xy))) \overset{*}{\to} (yy)$$

$$Y_f \to (f(Y_f)) \to (f(f(Y_f))) \to \ldots$$

Cette complexité est telle que le λ-calcul sans constantes est un modèle général de calculabilité. Les fonctions que l'on représente dans le λ-calcul sans constantes muni de la règle de β-conversion sont exactement les fonctions que l'on peut calculer par des machines de Turing ou encore les fonctions récursives partielles de la récursivité selon Kleene. En effet, Church représente les entiers dans le λ-calcul sans constantes par des expressions

$$\underline{n} = (\lambda f\cdot f^n) \text{ où } f^n = (\lambda x\cdot\underbrace{(f(f(\ldots(fx)\ldots)))}_{n \text{ fois}})$$

Le prédicat testant si un entier est nul est représenté par l'expression

$$\underline{\text{zéro}} = (\lambda x\cdot(x(\lambda y\cdot K))) \text{ où } K = (\lambda x\cdot(\lambda y\cdot x))$$

et on peut vérifier que $(((\underline{\text{zéro}}\ \underline{n})x)y)$ se réduit en x si $n = o$ et en y si $n>0$. Les opérations de récursions sont introduites en se servant de l'opérateur $Y = \lambda f\cdot Y_f$ où Y_f a été définie plus haut. Comme le λ-calcul est un modèle général de la calculabilité, un certain nombre de problèmes deviennent indécidables. Par exemple, on ne peut pas décider si $M \overset{*}{\to} N$, ou bien si le calcul d'une expression M s'arrête, c'est-à-dire si M se réduit sur une expression inconvertible, encore appelée forme normale. En outre, il n'est donc pas étonnant que le λ-calcul puisse être considéré comme un modèle des langages de programmation, puisque ces derniers veulent être aussi des modèles généraux de la calculabilité. Mais il faut faire alors un peu attention, car on veut dans ce cas manipuler un λ-calcul avec constantes plutôt qu'un λ-calcul sans constantes muni du codage des entiers que nous venons de décrire.

En effet, la règle de (β-) conversion est très proche du mécanisme d'appel d'une procédure d'un langage de programmation et du problème de passation des paramètres. En effet, lorsqu'en ALGOL 60, on écrit

```
procédure entière PLUS (entier x,y) ;
    retourner (x + y) ;
```

on peut représenter cette procédure par la λ-expression $((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot x + y))$. De même, un appel de cette procédure et une évaluation de cet appel correspondent à une application et à une réduction. Par exemple, on associe à PLUS (4,5) l'expression $((((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot x + y))4)5) = M$ et à l'évaluation de PLUS (4,5) correspond une réduction

$$M \overset{*}{\rightarrow} 4 + 5 \rightarrow 9$$

Cela montre bien que l'on a besoin de règles de conversions annexes sur les constantes (sur la constante + dans notre exemple). Ces règles sont encore appelées δ-règles par Church [11]. Mais la complétude combinatoire du λ-calcul permet de modéliser des langages de programmation dont les procédures peuvent prendre d'autres procédures en argument ou donner des procédures comme résultat. De tels langages permettent par exemple d'écrire dans un langage proche de l'ALGOL 60

```
procédure réelle DERIVEE (procédure f, réel x) ;
    retourner (lim_{h → o}((f(x + h) - f(x))/h)) ;
```

où l'expression $\lim_{h \to o}$ (g(h)) représente n'importe quel procédé itératif calculant la limite de g(h) pour h tendant vers o. Mais on pourrait aussi écrire

<u>procédure</u> <u>procédure</u> DER (<u>procédure</u> f) ;
    <u>retourner</u> (<u>procédure</u> <u>réelle</u> (<u>réel</u> x) ; DERIVEE (f,x)) ;

Cela autorise l'écriture d'une procédure

<u>procédure</u> <u>procédure</u> DER2 (<u>procédure</u> f) ;
    <u>retourner</u> (<u>procédure</u> <u>réelle</u> (<u>réel</u> x) ; DER (DER (f))) ;

proche de celles que propose Nolin. On peut donc écrire facilement dans un tel langage ALGOL étendu des opérateurs fonctionnels. La procédure DER prend une procédure f en argument et rend une procédure comme résultat. Un tel langage est difficilement compilable et est plutôt interprétatif. Les différentes règles de passage d'arguments à une procédure (appels par valeur, appels par nom...) correspondent aux différentes réductions que l'on peut effectuer sur la λ-expression associée à l'appel. Par exemple, l'expression DER (DER(f)) peut être évaluée en calculant d'abord l'expression globale ou la sous-expression DER (f). La correspondance entre un langage de type ALGOL 60 et le λ-calcul a été traitée en détail par Landin. Certains langages de programmation ont été construits sur le λ-calcul. Le plus connu est sans doute le LISP de Mac Carthy qui diffère cependant du λ-calcul par la règle de portée des variables liées (voir Gordon). Rappelons également que le λ-calcul contient une expression Y (voir plus haut), opérateur de "point-fixe", traduisant la récursion qui permet de rendre compte des langages de programmation où la définition récursive de procédures est autorisée.

En résumé, le λ-calcul est un modèle simple du mécanisme d'évaluation (et plus particulièrement d'appel de procédure) dans les langages de programmation dont le procédures peuvent prendre comme argument des procédures et donner comme résultat d'autres procédures.

Ce modèle est souvent trop général, car les langages de programmation ont fréquemment des restrictions de type sur les arguments ou résultats d'une procédure, pour de diverses raisons : sécurité, efficacité de compilation... Par exemple, un premier type de restriction est d'interdire aux procédures de prendre comme arguments ou de donner comme résultats des procédures. Alors un formalisme analogue à celui de Nivat et Vuillemin pour traiter des schémas de programmes récursifs est plus adéquat. Un autre genre de restriction peut être d'exiger une contrainte de type sur les arguments d'une procédure (comme en ALGOL 68). Alors un formalisme comme le λ-calcul typé, que nous allons discuter plus loin, ou le langage LCF défini par Milner (voir Berry ou Plotkin) est aussi mieux approprié. Mais ces formalismes qui sont équivalents à des sous-ensembles du λ-calcul ont certaines propriétés qui demeurent vraies dans le λ-calcul. Par ailleurs, la simplicité de définition du λ-calcul fait que ces propriétés prennent parfois une formulation élégante. Nous ne prétendons pas que le λ-calcul est <u>le</u> modèle des langages de programmation, mais <u>un</u> modèle suffisamment général où un grand nombre de propriétés des langages de programmation s'expriment assez simplement.

2) <u>λ-calcul non typé ; λ-calcul typé</u> :

La complétude combinatoire du λ-calcul rendant bien difficile l'interprétation intuitive d'expressions de la forme (xx) ou (Ix)..., on s'est longtemps demandé si le λ-calcul n'était pas incohérent. Une première forme de cohérence a été montrée par <u>Church et Rosser</u>. En effet, pour toute λ-expression M et pour toute paire de réductions $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$, il existe deux réductions $N \overset{*}{\to} Q$ et $P \overset{*}{\to} Q$. Cela assure en particulier que, si M a une forme normale, alors cette forme normale est unique. Une deuxième forme de cohérence a été montrée beaucoup plus tard par Scott. Scott a décrit un modèle fonctionnel du λ-calcul fondé sur l'introduction de "pseudo-types" et sur une construction de limite inverse projective qui donne au λ-calcul un comportement asymptotique analogue à celui du calcul typé.Le problème de cardinalité qui se pose dans l'expression (xx) (car, si x prend ses valeurs dans l'espace des fonctions de D dans E, il faut aussi que x prenne ses valeurs dans D) est résolu en restreignant l'ensemble des fonctions considérées à un ensemble de fonctions continues pour une topologie sur des treillis induite par l'ordre "moins défini que" sur les fonctions. L'existence de ce modèle redonna beaucoup de vigueur au λ-calcul et à la théorie de la sémantique des langages de programmation. Depuis, d'autres interprétations du λ-calcul existent, par exemple $P\omega$ (Plotkin et Scott), $T\omega$ (Plotkin) ou des modèles plus syntaxiques (Barendregt...). Tous reposent sur le même principe de continuité. Les conséquences ou caractérisations syntaxiques de ces interprétations ont été étudiées par Barendregt, Hyland et Wadsworth. Mais, nous reviendrons plus tard sur cette notion d'interprétation.

En effet, un sous-ensemble strict de l'ensemble des λ-expressions, l'ensemble des λ-expressions typées, ne pose aucun problème d'interprétation. Avec la β-règle de conversion, cet ensemble constitue le λ-calcul typé. Un type est une expression représentant un ensemble fonctionnel ou un ensemble d'objets. Formellement, le symbole ι ("individu") représente un ensemble D donné et, par réccurrence, si α et β sont deux types représentant des ensembles D_α et D_β, la quantité $\alpha \to \beta$ représente l'ensemble $D_\alpha \to D_\beta$ des fonctions de D_α dans D_β. Toute λ-expression typée M a un type $\tau(M)$. L'ensemble des λ-expressions typées est l'ensemble minimal Λ_t contenant un ensemble V_t de variables typées et un ensemble C_t de constantes typées, qui est clos par

1) application typée : si M et N sont dans Λ_t et si $\tau(M) = \alpha \to \beta$ et $\tau(N) = \alpha$, alors (MN) est dans Λ_t et $\tau((MN)) = \beta$

2) abstraction par rapport à une variable : si M est dans Λ_t et si x est dans V_t, alors $(\lambda x \cdot M)$ est dans Λ_t. De plus, si $\tau(x) = \alpha$ et $\tau(M) = \beta$, alors $\tau((\lambda x \cdot M)) = \alpha \to \beta$.

Une restriction existe donc sur la formation des applications et cela interdit des expressions comme (xx) ou (1x). Le λ-calcul typé a la propriété Church-Rosser et a une interprétation intuitive évidente fondée sur la hiérarchie de fonctionnelles associées aux expressions de type. Mais le λ-calcul typé n'est pas un modèle général de calculabilité, ni un bon modèle des langages de programmation. En effet, la restriction sur les types fait que toute réduction du λ-calcul typé se termine sur une forme normale (Sanchis). On dit encore que le λ-calcul typé a une propriété de <u>normalisation forte</u>. Si on veut modeler des programmes dont le calcul ne se termine pas, alors le λ-calcul typé est insuffisant. Une solution est d'adjoindre un opérateur de récursion Y_α pour chaque type α muni d'une nouvelle règle de conversion permettant à toute sous expression de la forme $(Y_\alpha\ M)$ d'être remplacée par $(M(Y_\alpha\ M))$, si $\tau(M) = \alpha$. Cela revient exactement à considérer le langage LCF de Milner. Mais alors des problèmes d'interprétation resurgissent pour donner une interprétation à $(Y_\alpha\ M)$. Ces problèmes sont toutefois moins compliqués que dans le λ-calcul non typé (si on ne se préoccupe pas de mécanisme d'évaluation séquentielle), mais sont en fait résolus de la même manière que dans le λ-calcul non typé. On parle alors de plus petits points fixes de fonctions ou fonctionnelles continues par rapport à une topologie analogue à celle à laquelle nous avons fait déjà allusion pour les modèles du λ-calcul (non typé).

Nous sommes à présent en mesure de décrire les trois idées sur lesquelles repose le travail présenté dans cette thèse. Auparavant, nous signalons que nous ne nous intéresserons par la suite qu'au seul λ-calcul (non typé) sans constantes muni d'une seule règle de conversion, la β-conversion.

3) <u>Les prédicats bornés</u> :

Cet argument est technique, mais permet de simplifier un certain nombre de démonstrations.

Dans le λ-calcul typé, certains théorèmes sont beaucoup plus faciles à démontrer que dans le λ-calcul (non typé). Le prototype en est le théorème de Church-Rosser.

En effet, si on suppose démontrée la propriété de normalisation forte du λ-calcul typé, le théorème de Church-Rosser revient simplement à montrer :

(i) si $M \to N$ et $M \to P$, alors il existe Q tel que $N \overset{*}{\to} Q$ et $P \overset{*}{\to} Q$

Cette proposition est particulièrement simple à démontrer en envisageant les différents cas possibles pour deux conversions (élémentaires) d'une même expression. Comme toute réduction du λ-calcul typé se termine, on conclut aisément que

(ii) si $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$, alors il existe Q tel que $N \overset{*}{\to} Q$ et $P \overset{*}{\to} Q$

Mais la situation diffère complètement dans le λ-calcul non typé. En effet, la propriété de normalisation forte n'est alors plus vérifiée et la proposition (i) ne suffit pas à démontrer (ii). Pour faire passer une récurrence, on montre dans le λ-calcul général que

(i)' si $M \to_{/\!/} N$ et $M \to_{/\!/} P$, alors il existe Q tel que $N \to_{/\!/} Q$ et $P \to_{/\!/} Q$

où $\to_{/\!/}$ est un type particulier de réduction représentant la contraction simultanée en parallèle de plusieurs radicaux. Un radical est toute sous-expression convertible, c'est-à-dire de la forme $((\lambda x \cdot A)B)$. Alors plusieurs techniques sont possibles pour démontrer (i)' : soit on considère un ordre particulier pour réduire simultanément plusieurs radicaux (en fait de l'intérieur vers l'extérieur) et on obtient la démonstration de Taït et Martin-Löf, soit on montre la proposition dans toute sa généralité et on obtient la démonstration de Curry & Feys. La première méthode est assez simple, car on peut la rendre axiomatique, mais toutefois assez longue. La deuxième technique est plus compliquée.

Pourtant, Scott interprète le λ-calcul (non typé) comme ayant le comportement asymptotique du λ-calcul typé. Cette propriété est syntaxiquement reproduite par un λ-calcul "pseudo-typé" de Hyland et Wadsworth. Ce λ-calcul est comme le λ-calcul général, mais toute sous-expression d'une expression pseudo-typée a un exposant entier positif ou nul. Notons Λ_{pt} l'ensemble des λ-expressions pseudo-typées. L'opération de conversion ne diffère de la conversion de Λ que par la manipulation des exposants. Toutefois, la conversion d'un radical $((\lambda x \cdot U)^m\ V)^n$ n'est autorisée que si $m>o$. Cela entraîne que ce λ-calcul pseudo-typé a une propriété de normalisation forte (voir [24]). En outre, pour toute paire de réductions $M \overset{*}{\rightarrow} N$ et $M \overset{*}{\rightarrow} P$ du λ-calcul ordinaire, il existe une expression U de Λ_{pt}, isomorphe à $M \in \Lambda$, avec des exposants suffisamment grands et deux réductions $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $U \overset{*}{\rightarrow} W$ isomorphes aux deux réductions précèdentes. Grâce à la propriété de normalisation forte de Λ_{pt}, on peut donc se contenter de démontrer (i) dans Λ_{pt} pour assurer (ii) dans Λ_{pt} et donc dans Λ. On arrive donc ainsi à simuler la situation du λ-calcul typé dans le λ-calcul général grâce à un λ-calcul pseudo-typé.

Malheureusement, la démonstration de la propriété de normalisation forte n'est pas simple. La technique précèdente semble donc un peu brutale pour démontrer la propriété Church-Rosser. Mais, et c'est alors que l'on gagne sensiblement, la méthode précèdente permet de démontrer d'autres théorèmes qui sont faciles à montrer dans le λ-calcul typé (grâce à la normalisation forte) : par exemple les théorèmes de standardisation et des développements finis de Curry et Feys, le théorème des développements finis généralisés que nous verrons ici, le théorème de complétude des réductions de l'intérieur vers l'extérieur de Welch... Nous avons utilisé cette technique dans [23] pour démontrer cette dernière propriété.

Si la méthode du λ-calcul pseudo-typé marche si bien, c'est que, grâce à ce formalisme, on arrive à caractériser des sous-ensembles arbitrairement grands de l'espace des réductions du λ-calcul ordinaire qui ont les propriétés de normalisation forte et de Church-Rosser. On peut donc se demander s'il est possible de caractériser ces sous-ensembles directement dans le λ-calcul sans utiliser le λ-calcul pseudo-typé. Cela constituera notre première démarche.

Dans un premier temps, afin d'éliminer des phénomènes parasites dus au fait que les exposants du calcul pseudo-typé prennent des valeurs entières, nous tenterons de généraliser le fonctionnement des exposants du λ-calcul pseudo-typé. Cela nous donnera un λ-calcul étiqueté muni d'une β-conversion étiquetée. La conversion d'un radical $((\lambda x{\cdot}U)^{\alpha}\ V)^{\beta}$ ne sera autorisée que si un prédicat $P(\alpha)$ donné à l'avance est vérifié. Ce λ-calcul sera Church-Rosser et on retrouvera la propriété de normalisation forte si ce prédicat $P(\alpha)$ n'est vérifié que pour des étiquettes pas trop grandes. On dira encore que ce prédicat est alors borné. On pourra donc adopter la technique de démonstration précédemment décrite en utilisant des prédicats bornés. Le gain que nous aurons fait en généralité par rapport au λ-calcul pseudo-typé laissera espérer que l'on collera de plus près la propriété syntaxique recherchée.

4) <u>Les réductions optimales</u> :

Il s'agit de généraliser au λ-calcul un résultat de Vuillemin obtenu pour les schémas de programme récursifs. Un résultat similaire a été obtenu par Staples pour le cas de la logique combinatoire.

Le problème est simple à énoncer. Existe-t-il une stratégie simple pour réduire toute expression M, qui a une forme normale, jusqu'à sa forme normale N en un coût optimal, c'est-à-dire avec un nombre minimal de conversions élémentaires ? Si une telle stratégie existe, peut-on fournir un algorithme correspondant pour évaluer les λ-expressions de manière optimale ?

Pour attaquer ce problème, comme le montre Vuillemin, il faut respecter deux contraintes :

1) on doit éviter de faire des conversions inutiles. Par exemple, considérons $M = ((\lambda x \cdot y)M_1)$. Cette expression admet la forme normale $N = y$, car en convertissant le radical externe de M, on a $M \to N$. D'autres réductions de M aboutissent à N, si M_1 n'est pas en forme normale. Par exemple

$$M \to ((\lambda x \cdot y)M_2) \to ((\lambda x \cdot y)M_3) \to \ldots \to ((\lambda x \cdot y)M_n) \to y = N$$

où $M_1 \to M_2 \to M_3 \to \ldots \to M_n$. Si M_1 n'a pas de forme normale, il existe même des réductions de M qui ne se terminent pas. Or toutes ces réductions ont un coût supérieur à $M \to N$, car elles convertissent des radicaux inutiles pour obtenir N.

2) on doit éviter de dupliquer des radicaux utiles. Par exemple, considérons $M = \Delta(Ix)$ en posant $\Delta = (\lambda y \cdot (yy))$ et $I = (\lambda z \cdot z)$. Il existe une réduction, de coût 2, issue de M qui atteint la forme normale $N = (xx)$ de M. En effet, on a

$$M \to (\Delta x) \to (xx) = N$$

En revanche, toute réduction qui convertit d'abord le radical externe de M atteint N en un coût 3. Par exemple

$$M \to ((Ix)(Ix)) \to (x(Ix)) \to (xx) = N$$

Cette dernière réduction a un coût supérieur car on duplique le radical (Ix) de M que l'on convertit deux fois au cours de la réduction.

Ces deux contraintes semblent a priori contradictoires. En effet, la première laisse supposer que l'on a toujours intérêt à réduire un radical externe (qui semble toujours utile). La seconde semble indiquer le contraire et laisse croire que, si une réduction, qui convertit toujours un radical utile interne, aboutit à la forme normale, alors elle ne fait pas de duplication et est donc optimale. La première remarque peut se prouver formellement. La seconde est fausse et cela fait une différence sensible entre le comportement du λ-calcul et des schémas de programmes récursifs ou de la logique combinatoire. En effet, considérons $M = ((\lambda x\cdot(xI))(\lambda y\cdot(\Delta(yz))))$ où Δ et I représentent les mêmes expressions que précédemment. L'expression M a une forme normale $(zz) = N$ et on a les réductions suivantes issues de M en utilisant des crochets pour mieux faire apparaître le parenthésage

$$
\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[dll] \arrow[dr] & & \\
([\lambda y\cdot(\Delta(yz))]\ I) \arrow[d] & & & ((\lambda x\cdot(xI))\ [\lambda y\cdot((yz)(yz))]) \arrow[d] & \\
(\Delta\ (Iz)) \arrow[d] & & & ([\lambda y\cdot((yz)(yz))]\ I) \arrow[d] & \\
(\Delta z) \arrow[ddr] & & & ((Iz)(Iz)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & (z(Iz)) \arrow[dl] & & ((Iz)z) \arrow[dlll] \\
 & (zz) & & &
\end{tikzcd}
$$

Figure 1

Les réductions internes (à droite sur la figure) ne sont pas optimales. En effet, elles dupliquent une sous-expression (yz) qui deviendra plus tard un radical (Iz). Par contre, dans la réduction optimale (à gauche sur la figure), la conversion de (Iz) a été factorisée.

On peut même combiner les effets de duplication des radicaux utiles au cours des réductions externes et internes sur l'exemple suivant. (On supprime fréquemment les parenthèses dans les expressions en remplaçant $(\ldots((MM_1)M_2\ldots M_n)$ par $MM_1M_2\ldots M_n$ quand $n\geq 1$ et M, M_1, M_2, ... M_n sont dans Λ). Posons

$$\Delta_n = (\lambda x\cdot \underbrace{xx\ldots x}_{n \text{ fois}}) \qquad F_n = (\lambda x\cdot xI\underbrace{xx\ldots x}_{n \text{ fois}})$$

$$G_n = (\lambda y\cdot \Delta_n(yz)) \qquad G'_n = (\lambda y\cdot \underbrace{(yz)(yz)\ldots(yz)}_{n \text{ fois}})$$

Considérons $M = (F_m\ G_n)$. Alors on a les réductions

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
M_1 = G_n I \underbrace{G_n G_n \ldots G_n}_{m \text{ fois}} \arrow[d] & & N_1 = F_m G'_n \arrow[d] \\
M_2 = \Delta_n (Iz) G_n G_n \ldots G_n \arrow[d] & & N_2 = G'_n I G'_n G'_n \ldots G'_n \arrow[d] \\
M_3 = \Delta_n z G_n G_n \ldots G_n \arrow[d] & & N_3 = \underbrace{(Iz)(Iz)\ldots(Iz)}_{n \text{ fois}} G'_n G'_n \ldots G'_n \arrow[ddl, "*"] \\
M_4 = (zz\ldots z) G_n G_n \ldots G_n \arrow[dr, "*"] & & \\
 & N = (zz\ldots z) G'_n G'_n \ldots G'_n &
\end{tikzcd}$$

Figure 2

et la plus courte réduction de M à N dépend de la valeur de m par rapport à n. Cet exemple nous rend bien sceptiques. En effet, toute réduction issue de M fait des duplications de radicaux utiles et il est donc impossible d'éviter de faire des duplications quand on réduit M.

Pourtant, si on essaie d'imaginer une structure proche du λ-calcul effectuant des conversions sans duplications, on voudrait qu'une nouvelle règle $\Rightarrow$ de conversion corresponde à une opération élémentaire dans cette structure de la manière suivante sur l'exemple précédent :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
M_1 \arrow[d, Rightarrow] & & N_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
M_2 \arrow[d, Rightarrow] & & N_2 \arrow[d, Rightarrow] \\
M_3 \arrow[dr, Rightarrow] & & N_3 \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

En effet, les n radicaux (Iz) de N_3 sont des duplications du radical (Iz) de M_2, ne seraient pas dupliqués dans la structure sans duplications et cela équivaudrait à les contracter simultanément de N_3 à N avec un coût unitaire dans la structure associée. De même, pour les m + 1 duplications dans M_3 du radical $\Delta_n(yz)$ de M. Cet exemple montre donc que, si une structure sans duplications existe, le coût dans cette structure pour obtenir une forme normale peut-être arbitrairement meilleur par rapport au coût avec $\rightarrow$.

Pour aborder ce problème de duplications de radicaux, on peut donc avoir deux attitudes :

1) trouver la structure associée où aucune duplication ne s'effectue. Alors, une réduction externe dans cette structure a de bonnes chances d'être optimale, car alors on est sûr d'effectuer uniquement des réductions de radicaux utiles. Cette démarche correspond à ce que fait Vuillemin pour les schémas de programme récursifs. De même, Wadsworth a tenté de trouver une telle structure pour le λ-calcul. Mais la structure de Wadsworth fait parfois des duplications et n'est pas optimale. Ces deux structures représentent les expressions par des graphes sans cycles et reposent sur une idée de partage de sous-expressions. Malheureusement, nous ne serons pas capables d'exhiber une telle structure ici. Cela constituera certainement un échec pour l'utilisation pratique de nos résultats. Ce que nous ferons laissera pourtant supposer qu'une telle structure existe. Néanmoins, il se peut qu'un argument de complexité rende cette structure inutilisable ?

2) à défaut de trouver cette structure, essayer de définir la conversion $\Rightarrow$ désirée, directement avec les moyens du λ-calcul. Ceci reviendra à définir rigoureusement la notion de duplication de radical. La relation $\Rightarrow$ représentera la conversion simultanée d'un ensemble maximal de radicaux dupliqués d'un même radical, qui sera censé représenter l'objet unique converti à la place de cet ensemble de radicaux dans la structure associée. Une suite de conversions $\Rightarrow$ sera appelée une réduction complète par duplications ou d-complète et nous montrerons que toute réduction externe et d-complète est optimale.

La relation de duplication sera définie à partir de la notion de *résidus de radical* de Church. Intuitivement, si R est un radical dans une expression M et si $\mathcal{D}$ est une réduction $M \stackrel{*}{\rightarrow} N$, l'ensemble des radicaux de N, qui représente ce qu'il reste de R par $\mathcal{D}$ dans N, est l'ensemble $R/\mathcal{D}$ des résidus de R par $\mathcal{D}$. Par exemple, les radicaux soulignés de N sont les résidus du radical souligné de M dans les différentes réductions suivantes :

$$M = \Delta(Iz)(\underline{Iz}) \rightarrow N = (Iz)(Iz)(\underline{Iz})$$
$$M = \Delta(\underline{Iz})(Iz) \rightarrow N = (\underline{Iz})(\underline{Iz})(Iz)$$
$$M = \underline{\Delta(Iz)}(Iz) \rightarrow N = (\underline{\Delta z})(Iz)$$
$$M = ((\lambda x\cdot\underline{\Delta x})z) \rightarrow N = \underline{\Delta z}$$
$$M = \underline{\Delta(Iz)}(Iz) \rightarrow N = (Iz)(Iz)(Iz)$$
$$M = ((\lambda x\cdot y)(\underline{Iz})) \rightarrow N = y$$
$$M = \Delta(\underline{Iz})(Iz) \rightarrow (\underline{Iz})(\underline{Iz})(Iz) \rightarrow z(\underline{Iz})(Iz) = N$$

en utilisant la même abréviation que dans la figure 2 pour les parenthèses et où I et Δ ont la même signification que dans la figure 1. La notion de résidu dépend fortement de la réduction effectuée. En effet, toujours en soulignant, on a

$$M = (I(\underline{Iz})) \rightarrow N = (\underline{Iz})$$
$$M = (I(\underline{Iz})) \rightarrow N = (Iz)$$

selon que l'on convertisse le radical interne ou externe de M. Dans la littérature du λ-calcul, la notion de résidu a été longuement étudiée (voir Curry & Feys). Elle sert à prouver un grand nombre de théorèmes et notamment le théorème de Church-Rosser. Mais la notion de *radical créé par une réduction* l'a été beaucoup moins. Si $\mathcal{D}$ est une réduction $M \stackrel{*}{\rightarrow} N$, un radical R de N est créé par $\mathcal{D}$ si il n'existe pas de radical S dans N tel que $R \in S/\mathcal{D}$.

Pour notre problème d'optimalité, nous aurons absolument besoin de parler des radicaux créés. En effet, des duplications peuvent aussi se produire sur les radicaux créés. Par exemple dans le cas de la figure 2, la réduction $M \to N_1 \to N_2 \to N_3$ crée les n radicaux (Ix) de N_3 et nous voulons dire que ces radicaux sont des duplications d'un même objet. Pourtant, ces radicaux ne sont pas résidus d'un radical unique de M, N_1 ou N_2 le long de la réduction considérée. De même, en considérant l'exemple plus simple suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & M = (\Delta\ ((\lambda x\cdot(xa))I)) \arrow[dl] \arrow[ddrr] & & \\
 & & P = ((\lambda x\cdot(xa))I)((\lambda x\cdot(xa))I) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & P_1 = (\underline{Ia})((\lambda x\cdot(xa))I) \arrow[dl] \arrow[dr] & & P_2 = ((\lambda x\cdot(xa))I)(\underline{Ia}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & Q = \Delta(\underline{Ia}) \arrow[dlll] \arrow[dd] \\
a((\lambda x\cdot(xa))I) \arrow[dr] & & N = (\underline{Ia})(\underline{Ia}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & ((\lambda x\cdot(xa))I)a \arrow[dl] & \\
 & a(\underline{Ia}) \arrow[dr] & & (\underline{Ia})a \arrow[dl] & & \Delta a \arrow[dlll] \\
 & & aa & & &
\end{tikzcd}$$

Figure 3

les deux radicaux soulignés de N sont créés par toute réduction $M \overset{*}{\to} N$. Ces deux radicaux ne sont pas résidus d'un radical commun le long de toute réduction $M \to P \overset{*}{\to} N$,mais le sont le long de $M \to Q \to N$ .Notons $(R,\mathcal{D})$ pour signaler que R est un radical de l'expression finale de $\mathcal{D}$.Il y a deux manières d'introduire la relation recherchée entre deux radicaux représentés par $(R,\mathcal{D})$ et $(S,\mathcal{D})$:

1)dire que les radicaux $(R,\mathcal{D})$ et $(S,\mathcal{D})$ sont créés de la même manière le long de $\mathcal{D}$.Cela peut se faire en extrayant de $\mathcal{D}$ les conversions qui interviennent dans la création de R ou de S.Et on construira ainsi un radical $(R_o,\mathcal{D}_o)$ noté encore $(R,\mathcal{D})_o$ .Par exemple,si $\mathcal{D}$ est la réduction $M \to P \to P_1 \to N$ et R et S sont les radicaux (Ia) de N,on aura $(R,\mathcal{D})_o=(S,\mathcal{D})_o=((Ia),M \to Q)$.

2)noter $\mathcal{D};\mathcal{D}'$ la concaténation des réductions,poser $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}'$ pour signaler que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux réductions entre deux mêmes expressions et introduire la relation de duplication

$$(R,\mathcal{D}) \leq (R',\mathcal{D}') \quad \text{ssi} \quad \exists \mathcal{D}'' \text{ tel que } \mathcal{D};\mathcal{D}'' \equiv \mathcal{D}' \quad \text{et} \quad R' \in R/\mathcal{D}''$$

Alors,si $\mathcal{D}$ est la réduction $M \to P \to P_1 \to N$ et si R et S sont les radicaux (Ia) de N,on a $((Ia),M \to Q) \leq (R,\mathcal{D})$ et $((Ia),M \to Q) \leq (S,\mathcal{D})$.On peut même introduire une relation d'appartenance à une même famille en fermant la relation précédente par symétrie et transitivité,c'est à dire

$(R,\mathcal{D}) \sim (R',\mathcal{D}')$ ssi $(R,\mathcal{D}) \leq (R',\mathcal{D}')$ ou $(R',\mathcal{D}') \leq (R,\mathcal{D})$ ou s'il existe $(R'',\mathcal{D}'')$ tel que $(R,\mathcal{D}) \sim (R'',\mathcal{D}'') \sim (R',\mathcal{D}')$

Alors tous les radicaux soulignés de la figure 3 sont dans une même famille.

Les deux approches présenteront quelques difficultés techniques.La première nous fera standardiser les réductions,ce que l'on peut faire grâce à un théorème de Curry&Feys.La deuxième posera un problème,un peu plus délicat,dû à l'incohérence de la notion de résidu vis à vis de la relation $\equiv$,que nous avons vue par exemple quand

$M = (I(Iz)) \to N = (Iz)$ .En effet,intuitivement,tous les radicaux de l'expression de départ sont dans des familles différentes,c'est à dire $(R,\mathcal{O}) \not\sim (S,\mathcal{O})$ si $\mathcal{O}$ représente la réduction vide et si R et S sont des radicaux distincts.Or,dans $M = (I(Iz))$,on montre facilement que les deux radicaux R et S de M vérifient $(R,\mathcal{O}) \sim (S,\mathcal{O})$. Il faut donc restreindre la relation $\equiv$ et considérer une relation plus fine sur les réductions issues d'une même expression.

Pour cela,on introduira la notion de <u>résidu de réduction</u> notée $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$ si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ partent d'une même expression.Intuitivement, $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$ est ce qu'il reste de $\mathcal{D}$ après avoir effectué $\mathcal{D}'$.Formellement,cela se définit grâce au lemme des déplacements parallèles de Curry&Feys.Et la relation recherchée, que nous noterons ~ sans confondre avec la relation de famille sur les radicaux,sera

$$\mathcal{D} \sim \mathcal{D}' \quad \text{ssi} \quad \mathcal{D}/\mathcal{D}' = \mathcal{D}'/\mathcal{D} = \mathcal{O} \text{ (réduction vide)}$$

Alors on montrera que $(R,\mathcal{D}) \sim (R',\mathcal{D}')$ ssi $(R,\mathcal{D})_o = (R',\mathcal{D}')_o$,c'est à dire que deux radicaux sont dans une même famille ssi ils sont créés de la même manière.

Les réductions complètes par famille seront aussi les réductions complètes par duplication dont nous avons déja parlé ,et toute réduction complète par famille et externe sera optimale.

Par ailleurs,il se trouvera que le λ-calcul étiqueté dont nous avons parlé plus haut correspondra exactement à la notion de famille de radicaux.Et la propriété syntaxique,correspondant à la méthode des prédicats bornés du λ-calcul étiqueté,sera exactement la finitude et l'aspect Church-Rosser des réductions relatives à une réduction donnée à l'avance.Une réduction relative à une réduction $\mathcal{D}$ donnée est une réduction qui ne convertit que des radicaux de même famille que ceux convertis par $\mathcal{D}$.Nous aurons ainsi généralisé la propriété de finitude et de Church-Rosser des réductions relatives à un ensemble donné de radicaux de Curry&Feys,encore appelée propriété E ou théorème des développements finis.

5)Les interprétations de Herbrand:

Nous reprendrons ce que nous avons fait dans [23,24].Il s'agit de traiter l'aspect interprétation du λ-calcul de la même manière que les méthodes développées par Nivat ou Vuillemin pour les shémas de programme récursifs.Une approche similaire a été aussi faite dans le cas du λ-calcul par Hyland et Welch.

En connaissant a priori les modèles de Scott et surtout leur propriété de continuité sur des structures de treillis, il s'agit de définir une interprétation syntaxique et libre,c'est à dire avec le minimum d'hypothèses, du λ-calcul.Nous partons d'un théorème de Hyland et Wadsworth sur les approximations d'une λ-expression.En effet,dans les modèles de Scott, toute expression est la limite de ses approximations ,ce qui est tout à fait souhaitable si on veut que ces interprétations correspondent à l'ensemble des calculs ou réductions que l'on fait sur les expressions.Nous poserons donc a priori que toute expression est définie par la limite de ses approximations et nous montrerons que l'on peut définir une sémantique reposant sur cette seule hypothèse.

Cela consistera à démontrer une propriété de continuité des réductions,propriété soulevée par Welch et dite de complétude des réductions fonctionnant de l'intérieur vers l'extérieur.Tout réduction peut-elle être dépassée par une réduction fonctionnant de l'intérieur vers l'extérieur? Cette proposition sera montrée avec la méthode des prédicats bornés du λ-calcul étiqueté, comme nous l'avions fait dans [23].

Ainsi toute interprétation vérifiant le théorème des approximations sera plus fine ou égale à notre interprétation.

6)Plan de la thèse:

Dans le chapitre I , nous donnons les définitions élémentaires du λ-calcul.

Dans le chapitre II , nous introduisons le λ-calcul étiqueté et nous appliquons la méthode des prédicats bornés pour redémontrer les théorèmes classiques du λ-calcul: Church-Rosser, standardisation, développements finis.Nous introduisons l'équivalence $\sim$ par permutations sur les réductions issues d'une même expression.Nous montrerons que la relation $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$ est vérifiée ssi les réductions étiquetées correspondantes donnent la même expression étiquetée. On montrera que la réduction étiquetée induit une structure de treillis sur l'ensemble des expressions étiquetées. Nous introduirons la relation de famille sur les radicaux et nous montrerons le théorème des développements finis généralisés avec la méthode des prédicats bornés.

Dans le chapitre III,la notion de famille de radicaux est étendue à la notion de familles de sous-contextes étiquetés.Ceci nous permettra de montrer que deux radicaux sont dans une même famille ssi ils sont créés de la même manière.Toute famille de radicaux ne contiendra qu'une seule paire $(R,\mathcal{D})$ canonique telle que $\mathcal{D}$ soit standard et génère le radical F. En outre nous montrerons que deux radicaux sont dans une même famille ssi ils ont même étiquette dans le λ-calcul étiqueté (moyennant une condition très simple sur les étiquettes de l'expression initiale).

Dans le chapitre IV,nous parlerons de notre interprétation du λ-calcul.Nous montrerons que certains résultats de Berry sur l'aspect séquentiel de l'interprétation y sont vérifiés.De plus,la correspondance avec des sémantiques opérationnelles est étudiée.

Dans le chapitre V, la correction et le coût des réductions sont étudiés et nous montrons qu'un certain nombre de réductions sont optimales,notamment les réductions sures (et complètes) qui généralisent une définition de Vuillemin pour les shémas de programmes récursifs. Ces réductions optimales seront aussi définies,grâce à l'interprétation, pour les expressions qui n'ont pas de forme normale.

Enfin, dans les appendices, nous indiquons la méthode par laquelle nous avons obtenu le λ-calcul étiqueté en généralisant le λ-calcul de Hyland et Wadsworth. De plus, nous montrons comment on peut dériver par homomorphismes d'autres λ-calculs existant et, par conséquent, leur aspect Church-Rosser ou fortement normalisable.

CHAPITRE I

SYNTAXE

Nous rappelons brièvement les notions élémentaires du λ-calcul.

1) Définition du langage des λ-expressions : (Church [11]).

Soit un alphabet $V = \{x,y,z\cdots\}$ contenant un nombre dénombrable de lettres encore notées $v_1, v_2, v_3, \cdots$ et un ensemble $S = \{(,),\lambda\}$ de symboles particuliers. Le langage $\Lambda(V)$, ou plus simplement Λ, des *λ-expressions* est le sous-ensemble minimal de l'ensemble des mots sur S et V, c'est à dire de $(S+V)^*$, contenant :

(1)	x	si $x \in V$
(2)	(MN)	si $M,N \in \Lambda$
(3)	$(\lambda x M)$	si $M \in \Lambda$ et $x \in V$

Une expression de la forme (1) est dite être une *variable*, une de la forme (2) une *application* et une de la forme (3) une *abstraction*.

Nous utilisons un certain nombre d'*abréviations* destinées à restreindre l'utilisation abusive de parenthèses (voir Church [11]).

Règle 1 : L'omission des parenthèses ( ) dans (MN) est autorisée, quand on peut le faire sans ambiguité, (MN) pouvant être l'expression complète considérée ou simplement une sous-expression. Pour de telles parenthèses omises, la règle à suivre est l'association vers la gauche. Par exemple :

fxy	est une abréviation de		$((fx)y)$
$f(xy)$	"	"	$(f(xy))$
$fxyz$	"	"	$(((fx)y)z)$
$f(xy)z$	"	"	$((f(xy))z)$
$f(\lambda xx)y$	"	"	$(f(\lambda xx))y)$

Règle 2 : Nous ajoutons à S un nouveau symbole "." et toute sous-formule de la forme :

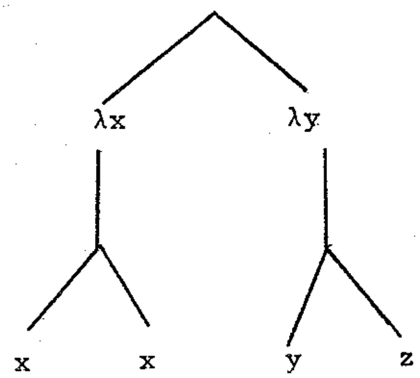
$\lambda x(MN)$	pourra être notée	$\lambda x \cdot MN$
$\lambda x(\lambda yM)$	" "	$\lambda x \cdot \lambda yM$
λxy	" "	$\lambda x \cdot y$

Règle 3 : Nous supprimons autant que possible les λ, c'est à dire :

$(\lambda xy \cdot MN)$ signifie $(\lambda x \cdot \lambda y\ MN)$ ou $(\lambda x(\lambda y(MN)))$
$(\lambda xyz \cdot MN)$ signifie $(\lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda z\ MN)$ ou $(\lambda x(\lambda y(\lambda z(MN))))$
etc...

Règle 4 : Nous permettons l'omission des parenthèses les plus externes dans $(\lambda x \cdot M)$, ou dans $(\lambda xy \cdot M)$, ou dans $(\lambda xyz \cdot M)$, etc... quand ces expressions constituent l'expression entière (et non une sous-expression).

Nous représenterons parfois les λ-expressions par des *arbres* dont les feuilles sont des variables et dont les noeuds sont de deux sortes : des noeuds binaires pour chaque application et des noeuds unaires étiquetés par les symboles "λx" où $x \in V$ pour désigner une abstraction. Ainsi, l'expression $(\lambda x \cdot xx)(\lambda y \cdot yz)$ est représentée par l'arbre :



Un contexte est une λ-expression, dans laquelle une sous-expression n'existe pas. Un contexte est donc une λ-expression avec un trou. Autrement dit, un contexte $C[\ ]$ est :

(1) $[\ ]$
(2) $(MC'[\ ])$ si $M \in \Lambda$ et $C'[\ ]$ est un contexte
(3) $(C'[\ ]M)$ " "
(4) $(\lambda xC'[\ ])$ si $x \in V$ et $C'[\ ]$ est un contexte

Nous utilisons pour les contextes les mêmes abréviations que pour les λ-expressions et par exemple :

$\lambda xy\cdot[\ \ ]yx$ signifiera $(\lambda x(\lambda y(([\ \ ]y)x)))$

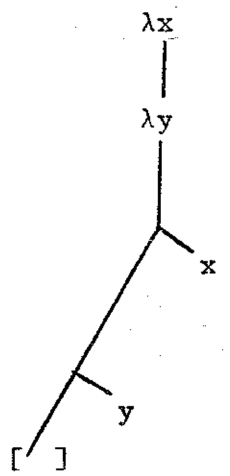
Posons $C[\ \ ] = \lambda xy\cdot[\ \ ]yx$. Par $C[M]$, si M est une λ-expression quelconque, nous désignons l'expression obtenue en insérant M entre les symboles $[\ \ ]$ du contexte désigné par $C[\ \ ]$, et en supprimant les caractères $[\ \ ]$ ou en les remplaçant par ( ) selon que la syntaxe des λ-expressions l'exige ou non. Par exemple :

$C[z] = \lambda xy\cdot zyx$

$C[x] = \lambda xy\cdot xyx$

$C[\lambda x\cdot x] = \lambda xy\cdot(\lambda x\cdot x)yx$

Sous forme d'arbre, le contexte $C[\ \ ]$ précédent s'écrira :



Nous considérerons également des *contextes à plusieurs trous*, dont la définition est analogue à la précédente mais autorise l'omission de plusieurs sous-expressions. Nous écrirons également $C[\ \ ]$ pour un tel contexte qui sera donc de la forme :

(1) $[\ \ ]$

(2) x

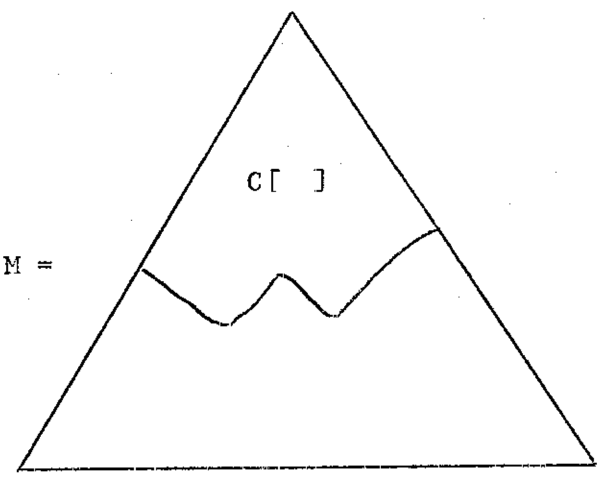
(3) $(C_1[\ \ ]C_2[\ \ ])$

(4) $(\lambda x C_1[\ \ ])$

si $x \in V$ et $C_1[\ \ ]$, $C_2[\ \ ]$ sont des contextes à plusieurs trous. Nous aurons alors quelques difficultés pour indiquer le nombre de trous d'un tel contexte et pour désigner chacun de ses trous. Si nous tenons à préciser tous les trous d'un tel contexte C[ ], nous écrirons C[, ,$\cdots$,]. Si nous ne voulons préciser qu'un , deux, trois ... trous, nous écrirons C[;], C[, ;], C[, , ;] etc... . Le symbole ";" sert donc à indiquer qu'il reste encore un certain nombre (éventuellement nul) de trous non précisés. Remarquons que nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'ordre des sous-expressions manquantes dans un contexte à plusieurs trous. Par exemple, si A[ ] = $\lambda xy\cdot$[ ]y[ ], nous poserons $A[x_1,x_2] = \lambda xy\cdot x_1yx_2$ ou $A[x_1,x_2] = \lambda xy\cdot x_2yx_1$. Mais une fois le choix fait, nous nous y tiendrons. Donc si par exemple $A[x_1,x_2] = \lambda xy\cdot x_1yx_2$, alors pour toutes expressions M et N on aura $A[M,N] = \lambda xy\cdot MyN$. En fait, cette imprécision ne nous gênera pas.

Un contexte C[ ] à plusieurs trous est un contexte *préfixe* de l'expression M s'il existe un n≥o et des expressions $M_1,M_2,\cdots M_n$ tels que $M = C[M_1,M_2,\cdots M_n]$. Sous forme d'arbres, on a :

M =



Tous préfixe C[ ] d'une sous-expression de M sera appelé un *sous-contexte* de M. Et nous préciserons ses *coordonnées* par un triplet (u,C[ ],M) défini de la manière suivante :

(1) C[ ] a pour coordonnées (ε,C[ ],M) si C[ ] est un préfixe de M(où ε représente le mot vide).

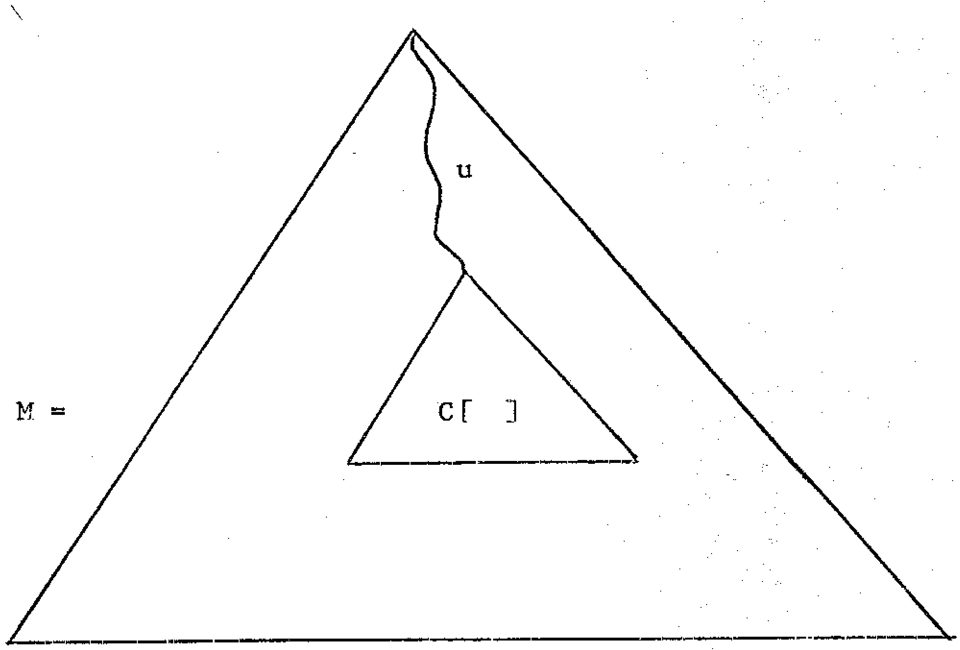
(2) $C[\ ]$ a pour coordonnées $(\lambda x u_1, C[\ ], M)$ si $M = \lambda x \cdot M_1$ et si $C[\ ]$ est le sous-contexte de M_1 de coordonnées $(u_1, C[\ ], M_1)$.

(3) $C[\ ]$ a pour coordonnées $(1u_1, C[\ ], M)$ si $M = M_1 M_2$ et si $C[\ ]$ est le sous-contexte de M_1 de coordonnées $(u_1, C[\ ], M_1)$

(4) $C[\ ]$ a pour coordonnées $(2u_2, C[\ ], M)$ si $M = M_1 M_2$ et si $C[\ ]$ est le sous-contexte de M_2 de coordonnées $(u_2, C[\ ], M_2)$.

Intuitivement, le mot u représente le chemin issu de la racine de l'arbre représentant M qui mène au sous-contexte $C[\ ]$. Graphiquement :

M =



Enfin, la *taille* $\|M\|$ de la λ-expression M sera le nombre de noeuds dans l'arbre qui la représente. Formellement :

$\|x\| = 0$

$\|\lambda x \cdot M\| = 1 + \|M\|$ si $M, N \in \Lambda$ et $x \in V$

$\|MN\| = 1 + \|M\| + \|N\|$

2) Règles de conversion :

Une même variable x peut avoir plusieurs occurrences dans une expression M. Pour une occurrence donnée de x dans M, considérons le contexte C[ ] à un seul trou formé par l'expression M dans laquelle nous remplaçons cette occurrence de x par [ ]. Nous avons donc $M = C[x]$ et nous dirons que cette occurrence de x est une *occurrence liée* de x dans M, s'il existe deux contextes C'[ ] et C"[ ] tels que $C[\ ] = C'[\lambda x\cdot C''[\ ]]$. Toute occurrence de x qui n'est pas une occurrence liée est appelée *occurrence libre* de x dans M.

Une variable qui a des occurrences liées est une *variable liée*. Une variable qui a des occurrences libres est une *variable libre*. Remarquons que dans une même expression une variable peut être à la fois libre et liée. De plus les variables liées d'une expression sont celles qui suivent immédiatement un λ dans cette expression. Les ensembles VARLIB(M) et VARLIE(M) des variables libres et liées d'une λ-expression M sont exactement définis récursivement de la manière suivante :

$$\mathrm{VARLIE}(x) = \emptyset$$
$$\mathrm{VARLIE}(MN) = \mathrm{VARLIE}(M) \cup \mathrm{VARLIE}(N)$$
$$\mathrm{VARLIE}(\lambda x\cdot M) = \{x\} \cup \mathrm{VARLIE}(M)$$

$$\mathrm{VARLIB}(x) = \{x\}$$
$$\mathrm{VARLIB}(MN) = \mathrm{VARLIB}(M) \cup \mathrm{VARLIB}(N)$$
$$\mathrm{VARLIB}(\lambda x\cdot M) = \mathrm{VARLIB}(M) - \{x\}$$

La *substitution* de x par N dans M, notée $M[x\backslash N]$, est définie récursivement par :

$$x[x\backslash N] = N$$
$$y[x\backslash N] = y \quad \text{si } x \neq y$$
$$(MM')[x\backslash N] = (M[x\backslash N]\ M'[x\backslash N])$$
$$(\lambda x\cdot M)[x\backslash N] = \lambda x\cdot M$$
$$(\lambda y\cdot M)[x\backslash N] = \lambda z\cdot (M[y\backslash z][x\backslash N]) \quad \text{si } x \neq y \text{ et où } z \text{ est la variable}$$

définie par :

1) si $x \notin VARLIB(M)$ ou $y \notin VARLIB(N)$, alors $z=y$

2) sinon z est la première variable de la liste $v_1, v_2, \cdots$ qui énumère V telle que $z \notin VARLIB(M) \cup VARLIB(N)$

Autrement dit, $M[x\backslash N]$ est l'expression obtenue en substituant toutes les occurrences libres de x dans M par l'expression N. Remarquons en outre que toute variable libre de N reste libre dans $M[x\backslash N]$. Ceci n'était pas le cas pour les contextes puisqu'une variable peut être libre dans N et ne pas l'être dans $C[N]$, si $C[\ ]$ est un contexte.

On considère généralement les *règles de conversions* suivantes :

α-conversion : toute sous-expression de la forme $\lambda x \cdot M$ peut être remplacée par $\lambda y \cdot M[x\backslash y]$ si $y \notin VARLIB(M)$

β-conversion : toute sous-expression de la forme $(\lambda x \cdot M)N$ peut être remplacée par $M[x\backslash N]$

η-conversion : toute sous-expression de la forme $\lambda x \cdot Mx$ peut être remplacée par M si $x \notin VARLIB(M)$.

Toute sous-expression de la forme $\lambda x \cdot M, (\lambda x \cdot M)N, \lambda x \cdot Mx$ (si $x \notin VARLIB(M)$) est appelée un *radical*. Nous avons donc des α-radicaux, β-radicaux, η-radicaux. Par la suite, nous ne considérerons que α et β conversions. Intuitivement, la α-conversion signifie que l'on peut renommer les variables muettes que sont les variables liées et la β-conversion indique que l'on applique une abstraction à un argument. Nous notons les relations induites par ces conversions de la manière suivante :

(1) $M \rightarrow M'$ signifie que M donne M' par application d'une règle de conversion à un radical R de M.

(2) $M \overset{R}{\rightarrow} M'$ à le même sens que précédemment mais permet de préciser le radical R sur lequel la conversion s'effectue. (Dans une même expression, il peut y avoir bien sûr plusieurs radicaux).

(3) $M \underset{\alpha}{\rightarrow} M'$ ou $M \underset{\beta}{\rightarrow} M'$ précise le type de la conversion effectuée.

(4) $M \overset{*}{\to} M'$ signifie que M' s'obtient de M par un nombre (éventuellement nul) de conversions. Nous dirons encore qu'il y a une *réduction* de M à M' ou que M' est *dérivable de M.*

Nous combinons ces notations pour obtenir :

$M \underset{\alpha}{\overset{R}{\to}} M', M \underset{\beta}{\overset{R}{\to}} M', M \underset{\beta}{\overset{*}{\to}} M', M \xrightarrow[\alpha,\beta]{*} M'$ dont les sens sont immédiats.

Si $M \underset{\beta}{\overset{R}{\to}} M'$, nous dirons encore que M' s'obtient de M par *contraction du radical* R de M, le *contractum* de R dans M' étant la sous-expression correspondant à R dans M'.

Convention : Nous ignorons autant que possible par la suite les α-conversions et chaque fois que nous parlerons de conversions ou de réductions, nous voudrons dire β-conversions ou β-réductions. De même, l'égalité entre deux expressions sera toujours comprise comme l'égalité modulo quelques α-conversions.

Considérons quelques exemples de réductions. Posons $I = \lambda x{\cdot}x, \Delta = \lambda x{\cdot}xx, Y_f = (\lambda x{\cdot}f(xx))(\lambda x{\cdot}f(xx))$. On a :

$$Ix \to x$$

$$\Delta\Delta \to \Delta\Delta \to \Delta\Delta \to \cdots$$

$$Y_f \to f(Y_f) \to f(f(Y_f)) \to f(f(f(Y_f))) \to \cdots$$

$$\Delta(\lambda x{\cdot}xy) \to (\lambda x{\cdot}xy)(\lambda x{\cdot}xy) \to (\lambda x{\cdot}xy)y \to yy$$

$$(\lambda xy{\cdot}xy)ab \to (\lambda y{\cdot}ay)b \to ab$$

$$(\lambda xy{\cdot}xy)yx \to (\lambda z{\cdot}yz)x \to yx$$

$$\begin{tikzcd}
 & IIa \arrow[dr] & \\
(\lambda x{\cdot}xa)(II) \arrow[ur] \arrow[dr] & & Ia \to a \\
 & (\lambda x{\cdot}xa)I \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Une expression qui ne contient aucun β-radical est *en forme normale*. Une expression M *a une forme normale* s'il existe une expression N en forme normale telle que $M \overset{*}{\to} N$. On dira aussi que M est alors *normalisable*. Dans les exemples précédents, seuls $\Delta\Delta$ et Y_f n'ont pas de forme normale. Une expression M est *fortement normalisable* si toutes les réductions issues de M aboutissent à une forme normale. Dans les exemples précédents, toutes les expressions normalisables sont en fait fortement normalisables. Mais, par exemple, si $K = \lambda xy\cdot x$ et $\Delta = \lambda x\cdot xx$, l'expression $Ka(\Delta\Delta)$ est normalisable sans être fortement normalisable. Si M est fortement normalisable, un argument simple (qui utilise en fait le lemme de Koenig) indique qu'il existe une plus longue réduction issue de M. La *profondeur* de l'expression M sera alors la longueur de cette réduction (c'est à dire son nombre de contractions élémentaires). Cette notion sera très importante tout au long du prochain chapitre, car nous ferons constamment des récurrences sur cette quantité.

3) Radicaux résidus : (Church [11])

Si $M \xrightarrow{R} N$, tous les radicaux de M autres que R ne disparaissent pas dans N et peuvent être inchangés, modifiés, déplacés ou dupliqués dans N. La notion de résidu va nous permettre de dire ce qu'il en advient. Nous donnons deux définitions (équivalentes) de cette notion.

Définition 1 : Si $M \xrightarrow{R} N$ et si S est un radical de M, les radicaux résidus de S dans N sont définis de la manière suivante si on pose $R = (\lambda x\cdot A)B$, $S = (\lambda y\cdot C)D$ et $R' = A[x\backslash B]$:

Cas 1 : R = S. Alors S n'a pas de résidu dans N.

Cas 2 : R et S sont deux sous-expressions disjointes. Alors $M = C[R,S]$ et $N = C[R',S]$. Si $C_1[\ ] = C[R';\ ]$, le radical S a comme résidu son homologue dans N tel que $N = C_1[S]$.

Cas 3 : S contient R. Alors $M = C[S]$ et $S = C_1[R]$. On a donc $N = C[C_1[R']]$ et S a comme résidu unique le radical S' tel que $N = C[S']$.

Cas 4 : R contient S. Deux cas sont possibles :

cas 4.1 : S est dans A. Alors $M = C[R]$ et $A = C_1[S]$. On a donc $N = C[R']$ où $R' = C_1[S][x\backslash B]$. Posons $S' = S[x\backslash B]$, $C_2[\ ] = C_1[\ ][x\backslash B]$ et $C_3[\ ] = C[C_2[\ ]]$. Le radical S a comme résidu le radical S' tel que $N = C_3[S']$.

cas 4.2 : S est dans B. Alors $M = C[R]$ et $B = C_1[S]$. Donc $N = C[A[x\backslash C_1[S]]]$ et les différentes occurrences de S dans $A[x\backslash C_1[S]]$ sont les résidus de S. Remarquons que x peut ne pas exister dans A. Dans ce cas, S n'a pas de résidu.

Si $M \xrightarrow{*} N$, les résidus dans N d'un radical R de M sont obtenus par fermeture réflexive et transitive de la notion précédente. Autrement dit, les résidus dans N de R sont les résidus des résidus de R dans M_1 si $M \to M_1 \xrightarrow{*} N$. Remarquons que cette définition est dépendante de la réduction utilisée pour aller de M à N. Il se peut que deux réductions différentes entre M et N ne donnent pas le mêmes résidus pour tout radical de M. En effet, prenons $M = I(Ix)$ où $I = \lambda y \cdot y$. Appelons R le radical externe M et S le radical interne. On a $M \xrightarrow{R} N$ et $M \xrightarrow{S} N$ si $N = Ix$. Or S a un résidu dans N pour la première réduction, mais n'en a pas pour la seconde.

Sous forme d'arbre, les différents cas de la définition précédente sont résumés par la figure 1.

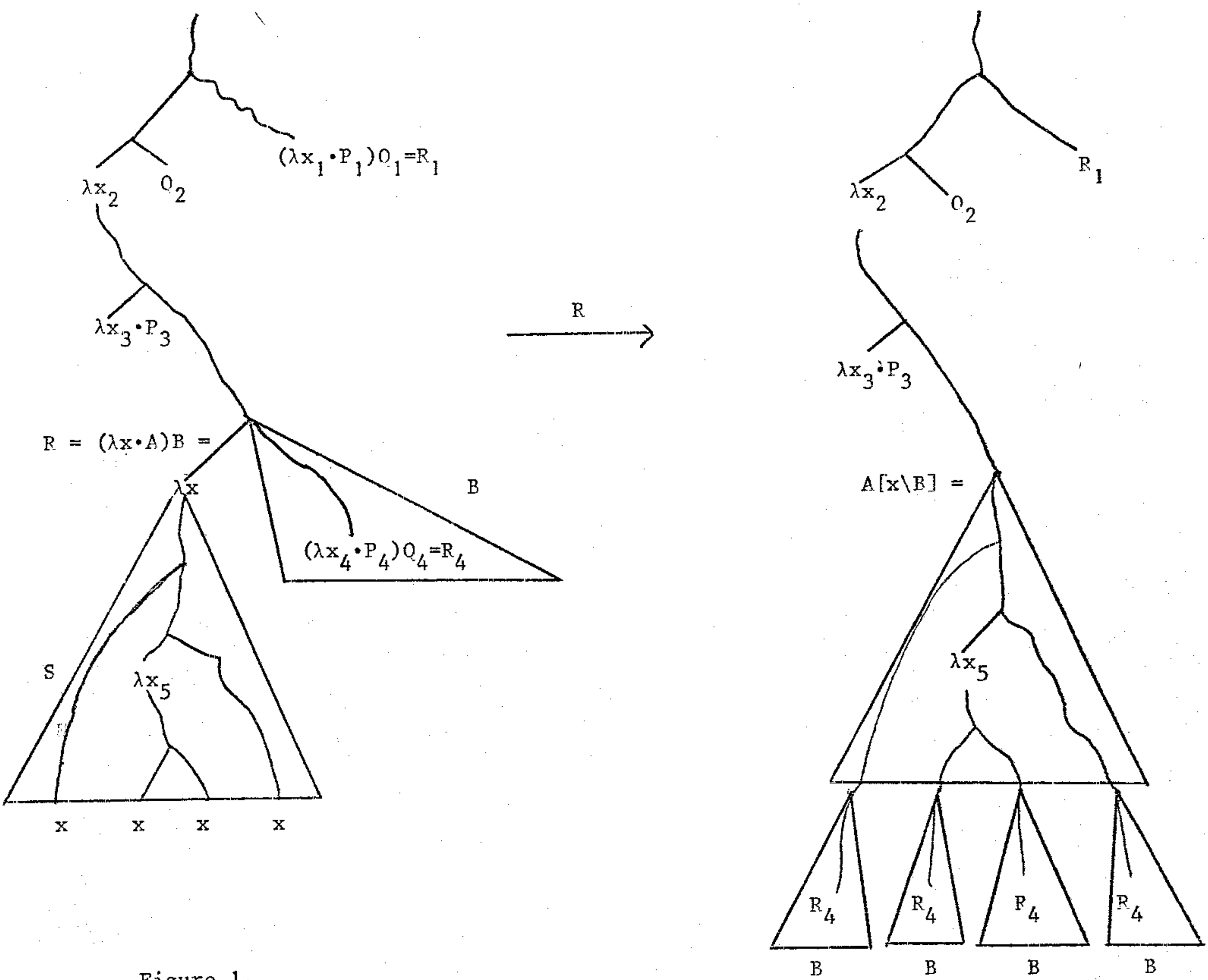


Figure 1.

Définition 2 :

Les résidus sont peut être définis plus rigoureusement en faisant appel à une technique de soulignement (voir Barendregt [1]). Considérons l'extension suivante du langage des λ-expressions.

$\underline{\Lambda} = \{x, MN, \lambda x\cdot M, \underline{(\lambda x\cdot M)N}\}$ si $x \in V$ et $M, N \in \underline{\Lambda}$

L'opération de substitution $M[x\backslash N]$ pour $M, N \in \underline{\Lambda}$ est définie comme précedemment avec la nouvelle règle :

$((\underline{\lambda y\cdot M)M'})[x\backslash N] = ((\underline{\lambda y\cdot M[x\backslash N])M'[x\backslash N]})$

en ignorant les problèmes de α-conversion. Et nous considérons comme β-règles le remplacement de toute sous-expression de la forme $(\lambda x\cdot M)N$ ou $\underline{(\lambda x\cdot M)N}$ par $M[x\backslash N]$. Alors si $M \in \Lambda$ et $M \xrightarrow{*} N$, les résidus dans N d'un radical R de M sont obtenus en soulignant R dans M (ce qui nous donne une expression M' de $\underline{\Lambda}$) et en considérant la réduction isomorphe $M' \xrightarrow{*} N'$. Les radicaux de N qui correspondent à des radicaux soulignés de N' sont les résidus de R dans N.

Cette définition est clairement identique à la précédente. Et en considérant encore $M = I(Ix)$ où I, R, S ont les mêmes significations que plus haut, on a $I(\underline{Ix}) \xrightarrow{R} \underline{Ix}$ et $I(\underline{Ix}) \xrightarrow{S} Ix$.

4) Conclusion et discussion :

Tant que nous considérerons le λ-calcul, muni de la β-règle, comme un langage de programmation, les définitions précédentes nous suffiront. On considérera toute abstraction comme une procédure à un argument et la β-règle représentera l'appel d'une telle procédure. Les différentes réductions d'une expression donnée correspondant donc aux différentes règles de passage des paramètres d'une procédure. Un tel langage de programmation est purement applicatif et ne contient donc pas d'instructions impératives telles que l'affectation de variable que l'on rencontre fréquemment dans les langages de programmation usuels. Donc d'un point de vue informatique, le λ-clacul ne fait que donner une description simple du mécanisme d'appel des procédures, mais ces procédures peuvent prendre en argument des procédures (y compris elle-même) et donner comme résultat d'autres procédures.

Nous serons également amenés à parler de la "valeur" d'une λ-expression (voir chapitre IV), pour pouvoir parler du résultat donné par une réduction.

L'interprétation du λ-calcul a semblé être longtemps un sujet mystérieux. En 1969, Scott [37] proposa un modèle du λ-calcul et depuis un certain nombre d'autres interprétations existent. Nous ne saurons faire ici une discussion mathématique sur ces modèles (voir Barendregt [1 , 5]). Mais certains aspects syntaxiques du λ-calcul ont pris un éclairage nouveau (Barendregt [1], Böhm [9], Hyland [19], Klop [21], Plotkin [33], Wadsworth [44], Welch [48]). C'est ce que nous essaierons de retenir ici. Et nous utiliserons et interpréterons syntaxiquement l'affirmation couramment répandue que toute λ-expression est interprétée dans les modèles de Scott comme la limite d'expressions normalisables. C'est ce qui fait l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE II

THEOREMES DE CHURCH-ROSSER , DE STANDARDISATION, DES DEVELOPPEMENTS FINIS ET DES DEVELOPPEMENTS FINIS GENERALISES

Nous redémontrons les théorèmes classiques du λ-calcul (en espérant le faire de manière originale) et nous introduisons d'autres propriétés.

1) UN λ-CALCUL ETIQUETE :

Nous allons introduire un λ-calcul étiqueté qui va se révéler être un outil très utile par la suite. On pourra ainsi approximer toute λ-expression par des λ-expressions étiquetées fortement normalisables, c'est à dire dont toutes les réductions aboutissent à une forme normale ; de plus, ce λ-calcul étiqueté aura une propriété Church-Rosser, assurant ainsi l'unicité de la forme normale pour les λ-expressions étiquetées fortement normalisables. Ceci nous permettra de démontrer des théorèmes du λ-calcul non étiqueté, qui habituellement comportent des récurrences complexes dues à des problèmes de terminaison, sans nous poser de problèmes de longueur. La méthode sera toujours la même : en utilisant le λ-calcul étiqueté, nous nous ramènerons au cas où les expressions sont fortement normalisables. Ainsi on montrera les théorèmes de Church-Rosser, de standardisation, des développements finis et, plus tard, des développements finis généralisés. En outre, le λ-calcul étiqueté sera un outil précieux pour parler de la notion de résidu et pour détecter les phénomènes de duplication qui se posent dans le λ-calcul. Enfin, il semble qu'un certain nombre de λ-calculs, le λ-calcul typé, le λ-calcul de Wadsworth [44], celui de Morris [28] s'obtiennent par de simples homomorphismes sur les manipulations d'étiquettes. On obtient donc, en corollaires, certaines propriétés de ces λ-calculs, par exemple la normalisation forte de toutes leurs expressions.

Un moyen d'obtenir ce λ-calcul étiqueté est décrit en appendice. Signalons que des λ-calculs analogues existent : ceux de Wadsworth [44] et Morris [28] déjà cités, la méthode de soulignement ("underlined method") utilisée par Barendregt [1]. Ces deux derniers ont les mêmes propriétés que notre calcul étiqueté, mais seulement pour une étape de réduction "parallèle". Finalement, l'utilisation de ce λ-calcul pour détecter les duplications est l'adaptation (non immédiate) au λ-calcul de ce que fait Vuillemin [42] pour les systèmes de fonctions définies récursivement. Mais nous donnerons ici une interprétation de ce formalisme en termes du formalisme du λ-calcul non étiqueté.

En fait, l'utilisation du λ-calcul de Wadsworth [44] aurait été suffisante pour la partie 1. C'est ce qui est fait pour le problème des réductions de l'intérieur vers l'extérieur dans [23]. Son utilisation pour le théorème de Church-Rosser a été suggéré à l'auteur par G. Plotkin et R. de Vrijer à Swansea en 1974. Nous rendons donc systématique cette utilisation avec le λ-calcul étiqueté qui est peut-être légèrement plus compliqué, mais qui nous permettra de démontrer d'autres propriétés. La définition de ce formalisme étiqueté a déjà été faite dans [24].

1.1. Syntaxe :

Nous disposons d'un ensemble infini de lettres $E_0 = \{a,b,c\cdots\}$ et nous considérons l'ensemble E' des *étiquettes* comme étant l'ensemble des mots formés sur l'alphabet E_0 avec un niveau quelconque de soulignement et surlignements. Ainsi E' contient :

$$\begin{cases} a & \text{si } a\in E_0 \\ \alpha\beta & \text{si } \alpha,\beta\in E' \\ \overline{\alpha} & \text{"} \\ \underline{\alpha} & \text{"} \end{cases}$$

En considérant le même ensemble V de variables que pour le λ-calcul normal, l'ensemble $\Lambda_e(E',V)$, encore noté Λ_e, des *λ-expressions étiquetées* est le plus petit ensemble contenant :

$$\begin{cases} x^\alpha & \text{si } x\in V, \alpha\in E' \text{ et } M,N\in\Lambda_e \\ (MN)^\alpha & \text{"} \qquad \text{"} \\ (\lambda xM)^\alpha & \text{"} \qquad \text{"} \end{cases}$$

La concaténation $\alpha\cdot M$ d'une étiquette $\alpha \in E'$ et d'une λ-expression étiquetée est définie par :

$$\begin{cases} \alpha\cdot x^{\beta} = x^{\alpha\beta} \\ \alpha\cdot(\lambda x M)^{\beta} = (\lambda x M)^{\alpha\beta} \\ \alpha\cdot(MN)^{\beta} = (MN)^{\alpha\beta} \end{cases}$$

La substitution d'une variable libre x par une expression étiquetée N dans une expression étiquetée M, notée $M[x\backslash N]$, est définie inductivement par :

$$\begin{cases} x^{\alpha}[x\backslash N] = \alpha\cdot N \\ y^{\alpha}[x\backslash N] = y^{\alpha} \\ (M_1 M_2)^{\alpha}[x\backslash N] = (M_1[x\backslash N] \;\; M_2[x\backslash N])^{\alpha} \\ (\lambda x\cdot M)^{\alpha}[x\backslash N] = (\lambda x\cdot M)^{\alpha} \\ (\lambda y\cdot M)^{\alpha}[x\backslash N] = (\lambda z\cdot M[y\backslash z][x\backslash N])^{\alpha} \qquad \text{si } x\neq y \end{cases}$$

et z est définie par :

1) si $x\notin VARLIB(M)$ ou $y\notin VARLIB(N)$, $z=y$
2) sinon z est la première variable v_i de V telle que :
   $z\notin VARLIB(M) \cup VARLIB(N)$

et où $M[y\backslash z]$ signifie la substitution de y par z dans M (il n'y a qu'à prendre la définition précédente de la substitution et supposer que l'étiquette de z est une étiquette vide).

1.2.: Conversions :

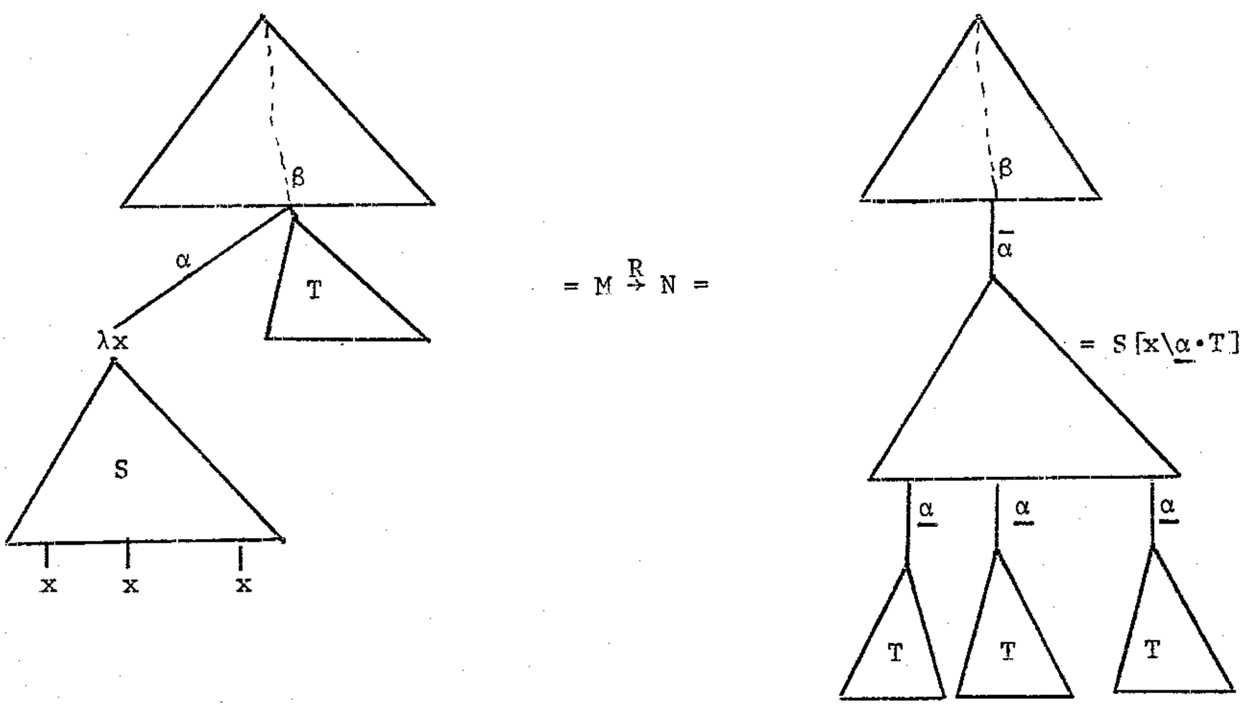
α-conversion : toute sous-expression de la forme $(\lambda x\cdot M)^{\alpha}$ peut être remplacée par $(\lambda y\cdot M[x\backslash y])^{\alpha}$, où y est supposé étiqueté par le mot vide, si $y\notin VARLIB(M)$.

β-conversion : toute sous-expression de la forme $((\lambda x\cdot M)^{\alpha}N)^{\beta}$ peut être remplacée par $\beta\cdot\bar{\alpha}\cdot M[x\backslash \underline{\alpha}\cdot N]$. De plus, cette conversion ne s'effectue que si un prédicat $P(\alpha)$ donné est vérifié.(*)

Comme pour le λ-calcul ordinaire, nous avons la même notion de radical. Le *degré* d'un β-radical $((\lambda x\cdot M)^{\alpha}N)^{\beta}$ sera l'étiquette α. Une expression sera en *forme normale* si elle ne contient pas de radicaux β-convertibles. Donc une expression en forme normale pourra contenir des radicaux dont le degré ne vérifie pas le prédicat P. Nous dirons qu'une expression est *normalisable* s'il existe une réduction issue de cette expression aboutissant

(*)Remarquons que la concaténation est associative et que sa précédence par rapport à la substitution n'a aucune importance (voir 1.3.1) à une forme normale. Une expression est *fortement normalisable* si toutes ses réductions aboutissent à une forme normale. Dans ce cas, nous parlerons de la *profondeur* de cette expression comme étant la longueur de la plus longue de ses réductions (voir chapitre I). Naturellement, nous ignorons autant que possible les α-conversions, l'égalité de deux expressions devant souvent être comprise comme l'égalité modulo des α-conversions et chaque fois que nous ne précisons pas le type de la conversion, il faut bien sûr comprendre β-conversion. En résumé, le λ-calcul étiqueté ne diffère du λ-calcul ordinaire que par la manipulation d'étiquettes et par la présence du prédicat P donné qui restreint l'ensemble des réductions considérées à partir d'une expression donnée. C'est le prédicat P qui nous permettra de simuler le comportement de toute expression par celui d'une expression fortement normalisable.

Sous forme d'arbres en plaçant les étiquettes sur les arcs, la règle de conversion est représentée par :

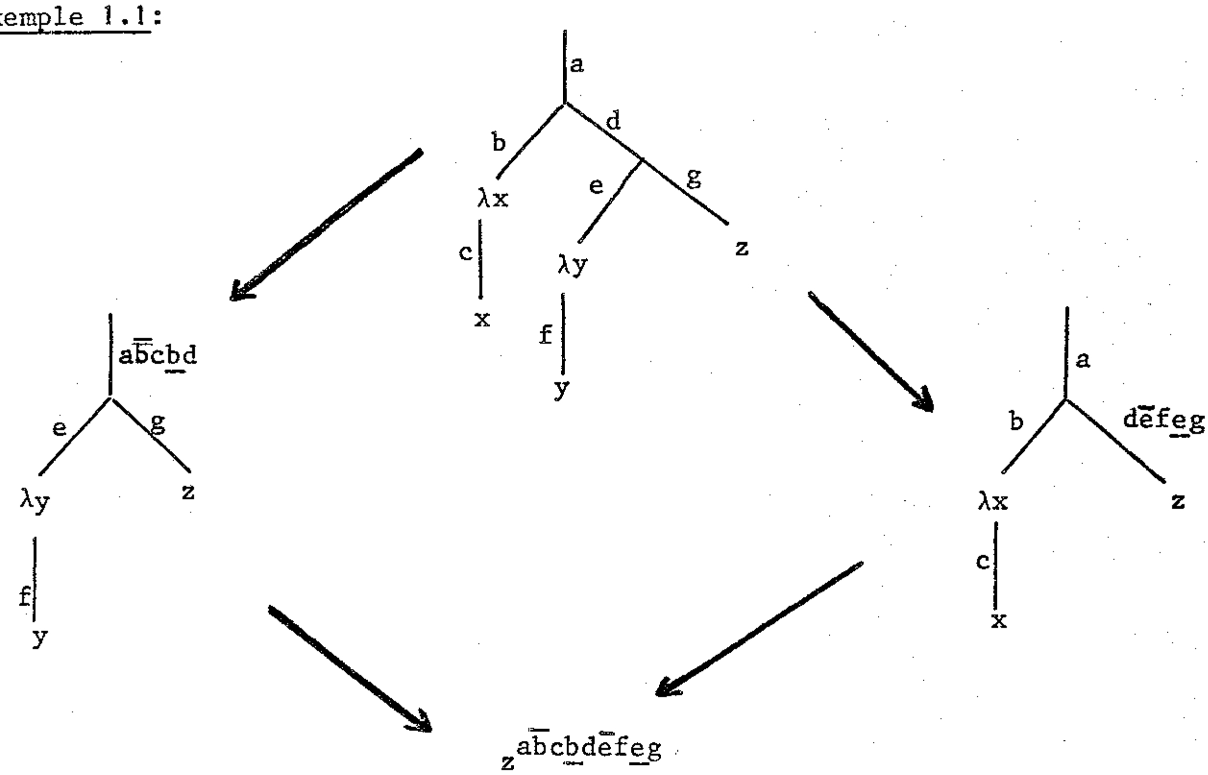


si $M \xrightarrow{R} N$ et $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$. Un exemple de réduction étiquetée est le suivant

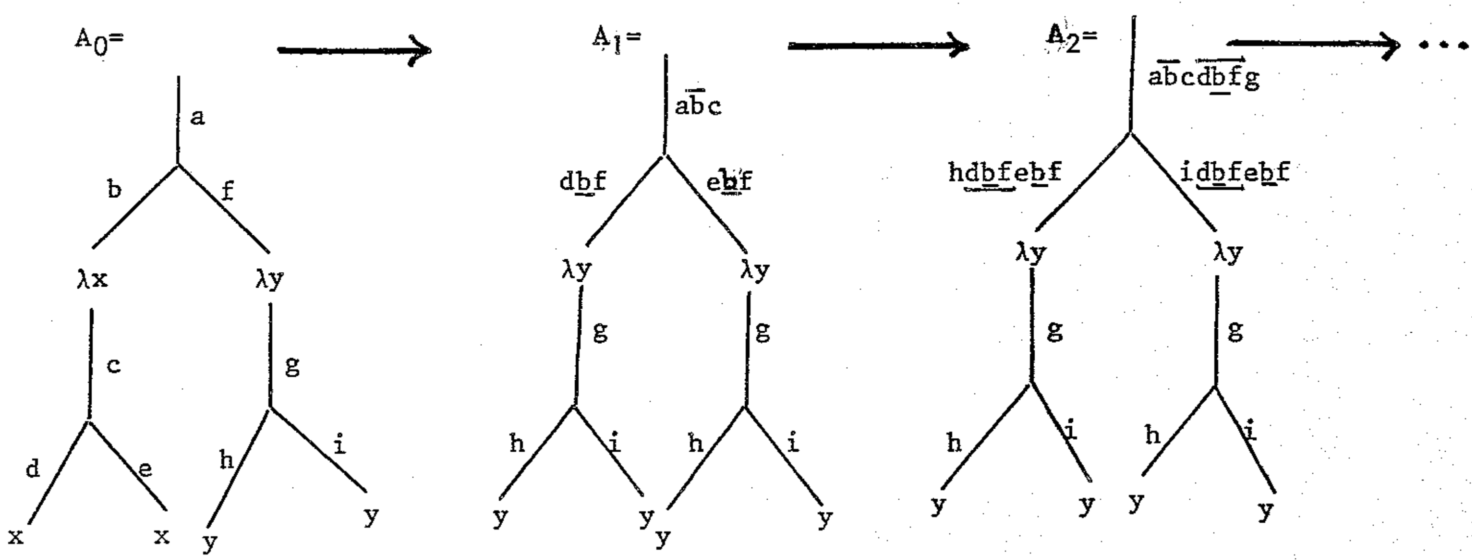
Exemples de réductions étiquetées

1) Deux réductions donnent une même expression dans Λ, mais pas dans Λ_e.
(On suppose $P(\alpha)$ = vrai pour tout α de E)

Exemple 1.1:



Exemple 1.2:

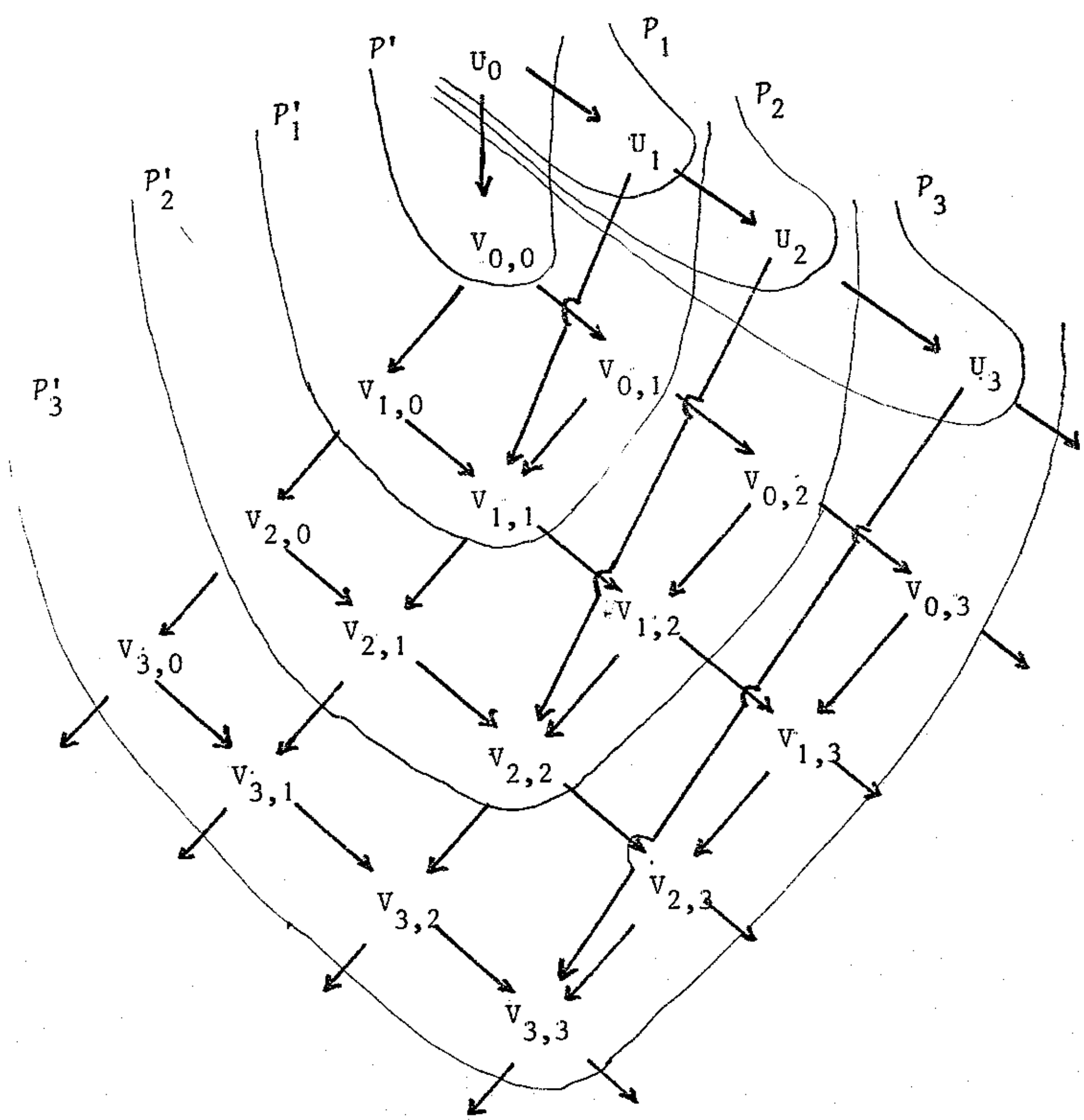


2)Une expression de Λ peut ne pas avoir de forme normale,mais peut devenir fortement normalisable dans Λ_e avec des prédicats P particuliers.

Considérons les A_i de l'exemple précédent et posons

$$U_i = ((\lambda x\cdot(x^m\ x^n)^1)^k\ A_i)^{\dot{p}} \qquad V_{i,j} = ((m\underline{k}\cdot A_i)\ (n\underline{k}\cdot A_j))^{p\overline{k}1}$$

L'ensemble des réductions issues de U_0 varie avec P comme suit:



Considérons $P' = \{k\}$, $P_1 = \{b\}$, $P_2 = P_1 \cup \{d\underline{b}f\}$, $P_3 = P_2 \cup \{h\underline{\underline{d}}\underline{b}fe\underline{b}f\}$, $P'_i = P_i \cup P'$.Pour chaque P_i,seules les réductions $U_0 \overset{*}{\to} U_i$ sont permises.Pour chaque P'_i,l'expression $V_{i,i}$ est la forme normale de U_0.

Enfin à partir du paragraphe 1.4, nous ne considérerons plus que l'ensemble $\Lambda_e(E,V)$, que nous appelerons aussi Λ_e, des expressions étiquetées par l'ensemble E contenant :

$$\begin{cases} a & \text{si } a\in E_0 \text{ et } \alpha,\beta,\gamma\in E \\ \alpha\bar{\beta}\gamma & \\ \alpha\underline{\beta}\gamma & \end{cases}$$

Il est clair que cet ensemble $\Lambda_e(E,V)$ est fermé par réductions, c'est à dire que $N\in\Lambda_e(E,V)$ si $M\in\Lambda_e(E,V)$ et $M \overset{*}{\to} N$.

1.3. Le théorème de Church-Rosser pour les expressions fortement normalisables :

1.3.1. Lemme 1 : $\alpha\cdot(M[x\backslash N]) = (\alpha\cdot M)[x\backslash N]$

Démonstration : par cas sur M. Posons $E_1 = \alpha\cdot(M[x\backslash N])$ et $E_2 = (\alpha\cdot M)[x\backslash N]$.

Cas 1 : $M = x^\beta$. On a $E_1 = \alpha\cdot(\beta\cdot N)$ et $E_2 = (\alpha\beta)\cdot N$ et l'associativité de la concaténation implique $E_1 = E_2$.

Cas 2 : $M = y^\beta$. Alors $E_1 = E_2 = y^{\alpha\beta}$.

Cas 3 : $M = (\lambda y\cdot M_1)^\beta$. Alors $E_1 = (\lambda y\cdot M_1[x\backslash N])^{\alpha\beta} = E_2$.

Cas 4 : $M = (M_1M_2)^\beta$. Alors $E_1 = (M_1[x\backslash N]\ M_2[x\backslash N])^{\alpha\beta} = E_2$. □

1.3.2. Lemme 2 : Si $x\neq y$ et si x n'est pas libre dans N', alors :

$$M[x\backslash N][y\backslash N'] = M[y\backslash N'][x\backslash N[y\backslash N']]$$

Démonstration : par récurrence sur la taille de M. Posons $E_1 = M[x\backslash N][y\backslash N']$ et $E_2 = M[y\backslash N'][x\backslash N[y\backslash N']]$.

Cas 1 : $M = x^\alpha$. Alors $E_1 = (\alpha\cdot N)[y\backslash N']$ et $E_2 = \alpha\cdot(N[y\backslash N'])$ car $x\neq y$ par hypothèse. Le lemme 1 implique $E_1 = E_2$.

Cas 2 : $M = y^\alpha$. Alors $E_1 = \alpha\cdot N'$ et $E_2 = (\alpha\cdot N')[x\backslash N[y\backslash N']]$. Or, par hypothèse, x n'est pas libre dans N'. Donc $E_2 = \alpha\cdot N'$ et $E_1 = E_2$.

Cas 3 : $M = z^\alpha$ où $z\neq x$ et $z\neq y$. Alors $E_1 = E_2 = z^\alpha$.

Cas 4 : $M = (\lambda z\cdot M_1)$. On a $E_1 = E_2$ par récurrence élémentaire sur M_1. (Nous ignorons toujours les problèmes dus à la α-conversion).

Cas 5 : $M = (M_1M_2)^\alpha$. Ce cas est identique au précédent en récurrant sur M_1 et M_2. □

<u>1.3.3. Lemme 3</u> : Si $M \to M'$, alors $M[x\backslash N] \to M'[x\backslash N]$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur la taille de M.

<u>Cas 1</u> : $M = x^{\alpha}$. Ce cas est impossible puisque $M \to M'$.

<u>Cas 2</u> : $M = (\lambda y \cdot M_1)^{\alpha}$. Alors $M' = (\lambda y \cdot M_1')^{\alpha}$ où $M_1 \to M_1'$ puisque le radical contracté est dans M_1. Par récurrence, $M_1[x\backslash N] \to M_1'[x\backslash N]$. Donc $M[x\backslash N] \to M'[x\backslash N]$.

<u>Cas 3</u> : $M = (M_1 M_2)^{\alpha}$ et le radical contracté n'est pas l'expression M toute entière. On fait, comme dans le cas précédent, une récurrence sur M_1 ou M_2.

<u>Cas 4</u> : $M = ((\lambda y \cdot M_1)^{\alpha} M_2)^{\beta} \to M' = \beta\bar{\alpha} \cdot M_1[y\backslash \underline{\alpha} \cdot M_2]$ et $\mathcal{P}(\alpha)$ est vrai. Nous ignorons toujours la α-conversion et nous pouvons donc supposer y non libre dans N et $x \neq y$. On a donc $M[x\backslash N] = ((\lambda y \cdot M_1[x\backslash N])^{\alpha} M_2[x\backslash N])^{\beta}$ et

$$\begin{aligned}
M'[x\backslash N] &= (\beta\bar{\alpha} \cdot M_1[y\backslash \underline{\alpha} \cdot M_2])[x\backslash N] \\
&= \beta\bar{\alpha} \cdot M_1[y\backslash \underline{\alpha} \cdot M_2][x\backslash N] && \text{(par le lemme 1)} \\
&= \beta\bar{\underline{\alpha}} \cdot M_1[x\backslash N][y\backslash (\alpha \cdot M_2)[x\backslash N]] && \text{(par le lemme 2)} \\
&= \beta\bar{\alpha} \cdot M_1[x\backslash N][y\backslash \underline{\alpha} \cdot M_2[x\backslash N]] && \text{(par le lemme 1)}
\end{aligned}$$

Donc, comme $\mathcal{P}(\alpha)$ est vrai, on a $M[x\backslash N] \to M'[x\backslash N]$. □

<u>Corollaire</u> : Si $M \xrightarrow{*} M'$, alors $M[x\backslash N] \xrightarrow{*} M'[x\backslash N]$.

<u>1.3.4. Lemme 4</u> : Si $M \to M'$, alors $\alpha \cdot M \to \alpha \cdot M'$.

<u>Démonstration</u> : par cas sur M. Le seul problème se pose quand l'expression M totale est le radical contracté de M à M'. Alors $M = ((\lambda x \cdot M_1)^{\beta} M_2)^{\gamma}$ et $M' = \gamma\bar{\beta} \cdot M_1[x\backslash \underline{\beta} \cdot M_2]$. De plus, on a $\mathcal{P}(\beta)$ vrai. Donc $\alpha \cdot M = ((\lambda x \cdot M_1)^{\beta} M_2)^{\alpha\gamma}$ et $\alpha \cdot M' = \alpha \cdot (\gamma\bar{\beta} \cdot M_1[x\backslash \underline{\beta} \cdot M_2]) = \alpha\gamma\bar{\beta} \cdot M_1[x\backslash \underline{\beta} \cdot M_2]$ en se servant du lemme 1. Comme $\mathcal{P}(\beta)$ est vrai, on a $\alpha \cdot M \to \alpha \cdot M'$. □

<u>Corollaire</u> : Si $M \xrightarrow{*} M'$, alors $\alpha \cdot M \xrightarrow{*} \alpha \cdot M'$.

<u>1.3.5. Lemme 5</u> : Si $N \xrightarrow{*} N'$, alors $M[x\backslash N] \xrightarrow{*} M[x\backslash N']$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur la taille de M.

<u>Cas 1</u> : $M = x^{\alpha}$. Alors $M[x\backslash N] = \alpha \cdot N$ et $M[x\backslash N'] = \alpha \cdot N'$. Donc le lemme 4 implique $\alpha \cdot N \xrightarrow{*} \alpha \cdot N'$, c'es à dire $M[x\backslash N] \xrightarrow{*} M[x\backslash N']$.

<u>Cas 2</u> : $M = y^{\alpha}$ où $y \neq x$. Alors $M[x\backslash N] = y^{\alpha} = M[x\backslash N']$ et on a bien $y^{\alpha} \overset{*}{\rightarrow} y^{\alpha}$.

<u>Cas 3</u> : $M = (\lambda y \cdot M_1)$. Alors, en ignorant la α-conversion, on a $M[x\backslash N] = (\lambda y \cdot M_1[x\backslash N])^{\alpha}$ et $M[x\backslash N'] = (\lambda y \cdot M_1[x\backslash N'])^{\alpha}$. Or par récurrence $M_1[x\backslash N] \overset{*}{\rightarrow} M_1[x\backslash N']$. D'où $M[x\backslash N] \overset{*}{\rightarrow} M[x\backslash N']$.

<u>Cas 4</u> : $M = (M_1 M_2)^{\alpha}$. Cas analogue au précédent en récurrant sur M_1 et M_2. □

<u>Corollaire</u> : Si $M \overset{*}{\rightarrow} M'$ et $N \overset{*}{\rightarrow} N'$, alors $M[x\backslash N] \overset{*}{\rightarrow} M'[x\backslash N']$

<u>1.3.6. Lemme 6</u> : Si $M \rightarrow M'$ et $M \rightarrow M''$, alors il existe N tel que $M' \overset{*}{\rightarrow} N$ et $M'' \overset{*}{\rightarrow} N$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur la taille de M.

<u>Cas 1</u> : $M = x^{\alpha}$. Ce cas est impossible puisque $M \rightarrow M'$.

<u>Cas 2</u> : $M = (\lambda y \cdot M_1)^{\alpha}$. Alors $M' = (\lambda y \cdot M_1')^{\alpha}$ et $M'' = (\lambda y \cdot M_1'')^{\alpha}$ où $M_1 \rightarrow M_1'$ et $M_1 \rightarrow M_1''$. Par récurrence sur M_1, on a $M_1' \overset{*}{\rightarrow} N_1$ et $M_1'' \overset{*}{\rightarrow} N_1$. Donc, on prend $N = (\lambda y \cdot N_1)^{\alpha}$.

<u>Cas 3</u> : $M = (M_1 M_2)^{\alpha}$ et l'expression M toute entière n'est pas le radical contracté entre M et M' ou entre M et M''. Alors on effectue une récurrence sur M_1 et M_2, analogue au cas précédent.

<u>Cas 4</u> : $M = ((\lambda x \cdot M_1)^{\alpha} M_2)^{\beta} \rightarrow \beta\bar{\alpha} \cdot M_1[x\backslash \underline{\alpha} \cdot M_2] = M'$ et $M \overset{S}{\rightarrow} M''$.

<u>Cas 4.1</u> : le radical S est dans M_1. Alors $M_1 \rightarrow M_1'$ et $M'' = ((\lambda x \cdot M_1')^{\alpha} M_2$
On a $M'' \rightarrow \beta\bar{\alpha} \cdot M_1'[x\backslash \underline{\alpha} \cdot M_2] = N$. Or, comme $M_1 \rightarrow M_1'$, on a, par les lemmes 3 et 4, $M' \rightarrow$

<u>Cas 4.2</u> : le radical S est dans M_2. Alors $M_2 \rightarrow M_2'$ et $M'' = ((\lambda x \cdot M_1)^{\alpha} M_2'$
Donc $M'' \rightarrow \beta\bar{\alpha} \cdot M_1[x\backslash \underline{\alpha} \cdot M_2'] = N$. Et, puisque $M_2 \rightarrow M_2'$, les lemmes 4 et 5 impliquent : $M' \overset{*}{\rightarrow} N$.

<u>Cas 5</u> : cas symétrique du précédent. □

<u>1.3.7. Proposition</u> : Si M est fortement normalisable et si $M \overset{*}{\rightarrow} M_1$ et $M \overset{*}{\rightarrow} M_2$, alors il existe N tel que $M_1 \overset{*}{\rightarrow} N$ et $M_2 \overset{*}{\rightarrow} N$.

Démonstration : par récurrence sur la profondeur de M, prof(M). Si prof(M) = 0, alors $M = M_1 = M_2$. Sinon, on a $M \to M' \overset{*}{\to} M_1$ et $M \to M'' \overset{*}{\to} M_2$. Par le lemme 6, il existe P tel que $M_1 \overset{*}{\to} P$ et $M_2 \overset{*}{\to} P$. Donc, comme prof(M') < prof(M) et prof(M") < prof(M), on a par récurrence P_1 et P_2 tels que : $M_1 \overset{*}{\to} P_1$, $P \overset{*}{\to} P_1$ et $M_2 \overset{*}{\to} P_2$, $P \overset{*}{\to} P_2$. De plus, prof(P) < prof(M). Donc, par récurrence, comme $P \overset{*}{\to} P_1$ et $P \overset{*}{\to} P_2$, on a un N tel que $P_1 \overset{*}{\to} N$ et $P_2 \overset{*}{\to} N$. D'où $M_1 \overset{*}{\to} P_1 \overset{*}{\to} N$ et $M_2 \overset{*}{\to} P_2 \overset{*}{\to} N$. □

Les expressions fortement normalisables ont donc la propriété Church-Rosser.

1.4. Le théorème de standardisation pour les expressions fortement normalisables :

1.4.1. Réduction standards, normales ; Radicaux plus à gauche ; définition:

Définition : Dans une expression M, nous dirons que le radical R est *plus à gauche* que le radical S ssi R contient S ou si, R et S étant disjoints, R se trouve à gauche de S.

Définition (*) : La réduction $M = M_0 \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} \cdots \xrightarrow{R_n} M_n$ est *standard* ssi pour tous i,j tels que $1 \leq i < j \leq n$ le radical R_j n'est pas un résidu d'un radical R'_j de M_{i-1} plus à gauche que R_i.

Les réductions standards travaillent donc de l'extérieur vers l'intérieur et, par convention, de la gauche vers la droite. Un cas particulier des réductions standards est la réduction normale.

Définition : Une réduction qui consiste à contracter toujours le radical le plus à gauche est appelée une *réduction normale*.

Notations : Nous écrivons $M \xrightarrow[st]{*} N$ pour signaler que la réduction est standard. De même, nous posons $M \xrightarrow[norm]{*} N$ pour une *réduction normale*.

1.4.2. Définition : Nous considérons la fonction Fon définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{Fon}\ ((\lambda x\cdot M)^\alpha) = (\lambda x\cdot M)^\alpha \\ \mathrm{Fon}\ ((MN)^\alpha) = \mathrm{Fon}(\alpha\bar{\beta}\cdot P[x\backslash\underline{\beta}\cdot N]) \text{ si } \mathrm{Fon}(M) = (\lambda x\cdot P)^\beta \end{cases}$$

(*)Cette définition provient de Curry&Feys[14].

Par Fon(M), nous désignons donc la première abstraction obtenue en effectuant la réduction normale de M. Cette fonction n'est donc pas définie pour tout M. Et nous avons $M \xrightarrow[\text{norm}]{*} \mathrm{Fon}(M)$ si Fon(M) est défini.

<u>1.4.3. Proposition</u> : Toute réduction $M \xrightarrow[\text{st}]{*} (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$ est de la forme $M \xrightarrow[\text{norm}]{*} \mathrm{Fon}(M) \xrightarrow[\text{st}]{*} (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur la longueur l de la réduction $M \xrightarrow[\text{st}]{*} (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$. Si $l=0$, alors $M = \mathrm{Fon}(M) = (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$. Si $l>0$, raisonnons par cas sur M.

<u>Cas 1</u> : $M = (\lambda x{\cdot}M_1)^{\alpha}$. Alors $M = \mathrm{Fon}(M)$.

<u>Cas 2</u> : $M = (\cdots((x^{\alpha}M_1)^{\beta_1}M_2)^{\beta_2}\cdots M_n)^{\beta_n}$. Ce cas est impossible, car M ne peut se réduire sur $(\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$.

<u>Cas 3</u> : $M = (\cdots((((\lambda y{\cdot}P)^{\alpha}Q)^{\beta}M_1)^{\beta}M_1)^{\beta_1}M_2)^{\beta_2}\cdots M_n)^{\beta_n}$. Considérons l'expression M_1 telle que $M \xrightarrow{R} M_1 \xrightarrow[\text{st}]{*} (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$ soit la réduction standard considérée de M à $(\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$. Le radical R est forcément le radical le plus à gauche de M. En effet, comme la réduction $M \xrightarrow{*} (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$ est standard, si le radical le plus à gauche de M n'est pas contracté entre M et M_1, on ne peut contracter ses résidus par la suite et donc on aboutirait à une expression de la même forme que M qui n'est certainement pas une abstraction. Donc R est le radical le plus à gauche de M et par récurrence $M_1 \xrightarrow[\text{norm}]{*} \mathrm{Fon}(M_1) \xrightarrow[\text{st}]{*} (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$. D'où $M \xrightarrow[\text{norm}]{*} \mathrm{Fon}(M) \xrightarrow[\text{st}]{*} (\lambda x{\cdot}N)^{\alpha}$. □

<u>1.4.4. Proposition</u> : Si M est fortement normalisable, alors pour tout N tel que $M \xrightarrow{*} N$, il existe une réduction standard $M \xrightarrow[\text{st}]{*} N$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur $\langle \mathrm{prof}(M), \|M\| \rangle$ où prof(M) est la profondeur de M et $\|M\|$ la taille de M. Si $\mathrm{prof}(M) = 0$, alors $M = N$ et la proposition devient triviale. Si $\mathrm{prof}(M)>0$, raisonnons par cas sur M.

<u>Cas 1</u> : $M = x^{\alpha}$. Ce cas est impossible, puisque prof(M)>0.

<u>Cas 2</u> : $M = (\lambda x \cdot M_1)^{\alpha}$. Alors $N = (\lambda x \cdot N_1)^{\alpha}$ et $M_1 \overset{*}{\rightarrow} N_1$. Or prof$(M_1)$ = prof(M) et $\|M_1\| < \|M\|$. Donc, par récurrence, on a $M_1 \xrightarrow[st]{*} N_1$. D'où $M \xrightarrow[st]{*} N$.

<u>Cas 3</u> : $M = (M_1 M_2)^{\alpha}$. Deux sous-cas se présentent :

<u>cas 3.1</u> : On a $N = (N_1 N_2)^{\alpha}$ et la réduction $M \overset{*}{\rightarrow} N$ consiste à réduire M_1 et M_2 séparément. Donc $M_1 \overset{*}{\rightarrow} N_1$ et $M_2 \overset{*}{\rightarrow} N_2$. Par récurrence, on a $M_1 \xrightarrow[st]{*} N_1$ et $M_2 \xrightarrow[st]{*} N_2$. D'où $(M_1 M_2) \xrightarrow[st]{*} (N_1 M_2) \xrightarrow[st]{*} (N_1 N_2)$, si bien que $M \xrightarrow[st]{*} N$.

<u>cas 3.2</u> : La réduction $M \xrightarrow{*} N$ se décompose de la manière suivante :

$$M = (M_1 M_2)^{\alpha} \overset{*}{\rightarrow} ((\lambda x \cdot N_1)^{\beta} \underline{N_2})^{\alpha} \rightarrow \alpha\bar{\beta} \cdot N_1 [x \backslash \underline{\beta} \cdot N_2] \overset{*}{\rightarrow} N$$

où $M_2 \overset{*}{\rightarrow} N_2$ et $M_1 \overset{*}{\rightarrow} (\lambda x \cdot N_1)^{\beta}$. Or, par récurrence, on a $M_1 \xrightarrow[st]{*} (\lambda x \cdot N_1)^{\beta}$. Et, par la proposition précédente, en posant $(\lambda x \cdot M_3)^{\beta}$ = Fon(M_1), on a $M_1 \xrightarrow[norm]{*} (\lambda x \cdot M_3)^{\beta} \overset{*}{\rightarrow} (\lambda x \cdot N_1)^{\beta}$. Donc $M_3 \overset{*}{\rightarrow} N_1$, et comme, d'autre part $M_2 \overset{*}{\rightarrow} N_2$, les lemmes 4 et 5 de la propriété Chruch-Rosser impliquent :

$$\alpha\bar{\beta} \cdot M_3 [x \backslash \underline{\beta} \cdot M_2] \overset{*}{\rightarrow} \alpha\bar{\beta} \cdot N_1 [x \backslash \underline{\beta} \cdot N_2].$$

En résumé, on a :

$$M = (M_1 M_2)^{\alpha} \xrightarrow[norm]{*} ((\lambda x \cdot M_3)^{\beta} M_2)^{\alpha} \rightarrow \alpha\bar{\beta} \cdot M_3 [x \backslash \underline{\beta} \cdot M_2] \overset{*}{\rightarrow} \alpha\bar{\beta} \cdot N_1 [x \backslash \underline{\beta} \cdot N_2] \overset{*}{\rightarrow} N$$

Or prof $(\alpha\bar{\beta} \cdot M_3 [x \backslash \underline{\beta} \cdot M_2]) <$ prof(M). D'où, par récurrence, on a $\alpha\bar{\beta} \cdot M_3 [x \backslash \underline{\beta} \cdot M_2] \xrightarrow[st]{*} N$. Donc la réduction :

$$M = (M_1 M_2)^{\alpha} \xrightarrow[norm]{*} ((\lambda x \cdot M_3)^{\beta} M_2)^{\alpha} \rightarrow \alpha\bar{\beta} \cdot M_3 [x \backslash \underline{\beta} \cdot M_2] \xrightarrow[st]{*} N \quad \text{est une}$$

réduction standard. □

1.5. Conditions sur P pour que toutes les expressions soient fortement normalisables :

Nous allons suivre une technique de démonstration due à D.van Daalen[15] qui nous semble plus intuitive que la méthode de réductibilité de Taït[41]. Cette méthode est utilisée pour le λ-calcul typé usuel, mais s'applique également à notre calcul étiqueté.

1.5.1. Notations et définitions :

Nous *noterons* $\tau(M)$ pour l'étiquette externe de M. Ainsi on a $\tau(x^\alpha) = \tau((MN)^\alpha) = \tau((\lambda x\cdot M)^\alpha) = \alpha$ et nous définissons la *hauteur* $h(\alpha)$ d'une étiquette α de la manière suivante :

$$\begin{cases} h(a) = 0 \\ h(\alpha\beta) = \mathrm{Sup}\{h(\alpha),h(\beta)\} \\ h(\overline{\alpha}) = h(\underline{\alpha}) = 1+h(\alpha) \end{cases}$$

Ainsi la hauteur d'une étiquette est son niveau maximum de soulignements et surlignements. Nous allons montrer que si les étiquettes vérifiant le prédicat P ont une hauteur bornée supérieurement, toutes les expressions deviennent fortement normalisables.

Définition : Nous dirons que le *prédicat P est borné supérieurement* si l'ensemble $\{h(\alpha) | \alpha\in E \text{ et } P(\alpha) \text{ vrai}\}$ est borné supérieurement.

Notation : Nous appelons NF l'ensemble des expressions fortement normalisables.

1.5.2. Lemme 1 : Si $M \xrightarrow{*} M'$, alors $h(\tau(M)) \leq h(\tau(M'))$

Démonstration : évidente. □

1.5.3. Lemme 2 : Si $(\cdots((MN_1)^{\beta_1}N_2)^{\beta_2}\cdots N_n)^{\beta_n} \to (\lambda x\cdot N)^\alpha$, alors $h(\tau(M)) \leq h(\alpha)$.

Démonstration : par récurrence sur n. Si n=0, on a $M \overset{*}{\to} (\lambda x\cdot N)^{\alpha}$ et le lemme 1 donne la réponse. Si n>0, on doit avoir :

$$(\cdots((MN_1)^{\beta_1}N_2)^{\beta_2}\cdots N_{n-1})^{\beta_{n-1}} \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot P)^{\gamma} \text{ et } N_n \overset{*}{\to} N'_n$$

et : $((\lambda y\cdot P)^{\gamma}N'_n)^{\beta_n} \overset{*}{\to} \beta_n\bar{\gamma}\cdot P[y\backslash\underline{\gamma}\cdot N'_n] \overset{*}{\to} (\lambda x\cdot N)^{\alpha}$

On a donc par récurrence $h(\tau(M)) \leq h(\gamma)$. D'où :

$$h(\gamma) < h(\bar{\gamma}) \leq h(\tau(\beta_n\bar{\gamma}\cdot P[y\backslash\underline{\gamma}\cdot N'_n])) \leq h(\alpha). \quad \square$$

1.5.4. Lemme 3 : Si $M[x\backslash N] \xrightarrow[st]{*} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$, deux cas sont seulement possibles :

1) $M \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot M')^{\alpha}$ et $M'[x\backslash N] \overset{*}{\to} P$

2) $M \overset{*}{\to} M' = (\cdots((x^{\beta}M_1)^{\beta_1}M_2)^{\beta_2}\cdots M_n)^{\beta_n}$ et $M'[x\backslash N] \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$.

Démonstration : par récurrence sur la longueur l de la réduction standard $M[x\backslash N] \xrightarrow[st]{*} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$.

Cas 1 : l=0. Alors $M[x\backslash N] = (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$. Un raisonnement sur la forme M implique deux sous-cas. Soit $M = (\lambda y\cdot M')^{\alpha}$ et $M'[x\backslash N] = P$. Soit $M = x^{\beta}$ et $x^{\beta}[x\backslash N] = (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$.

Cas 2 : l>0. Différents cas se présentent selon la forme de M.

Cas 2.1 : Si $M = (\lambda y\cdot M_1)^{\beta}$, alors $M[x\backslash N] = (\lambda y\cdot M_1[x\backslash N])^{\beta}$ et donc $\alpha=\beta$ et $M_1[x\backslash N] \overset{*}{\to} P$, puisque $M[x\backslash N] \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$.

Cas 2.2 : Si $M = (\cdots((y^{\beta}M_1)^{\beta_1}M_2)^{\beta_2}M_3)^{\beta_3}\cdots M_n)^{\beta_n}$, alors y=x car sinon on n'a pas $M[x\backslash N] \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$.

Cas 2.3 : Si $M = (\cdots((((\lambda y\cdot A)^{\gamma}B)^{\beta}M_1)^{\beta_1}M_2)^{\beta_2}\cdots M_n)^{\beta_n}$, on a $M[x\backslash N] = (\cdots((((\lambda y\cdot A^*)^{\gamma}B^*)^{\beta}M_1^*)^{\beta_1}M_2^*)^{\beta_2}\cdots M_1^*)^{\beta_n}$ si on pose $A^* = A[x\backslash N]$, $B^* = B[x\backslash N]$ et $M_i^* = M_i[x\backslash N]$ pour tout i. Or comme la réduction $M[x\backslash N] \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$ est standard, on a, par 1.4.3, cette réduction de la forme $M[x\backslash N] \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(M[x\backslash N]) \xrightarrow[st]{*} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$. D'où si Q' est la première expression obtenue le long de cette réduction, on a donc $M[x\backslash N] \overset{R}{\to} Q' \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$. Or, comme $M[x\backslash N] \neq \mathrm{Fon}(M[x\backslash N])$, on a : $Q' = (\cdots(((\beta\bar{\gamma}\cdot A^*[y\backslash\underline{\gamma}\cdot B^*])M_1^*)^{\beta_1}M_2^*)^{\beta_2}\cdots M_n^*)^{\beta_n}$.

Donc si $Q = (\cdots(((\beta\bar{\gamma}\cdot A[y\backslash\underline{\gamma}\cdot B])M_1)^{\beta_1}M_2)^{\beta_2}\cdots M_n)^{\beta_n}$, on a $M \to Q$ et $Q[x\backslash N] \xrightarrow[st]{*} (\lambda y\cdot P)^{\alpha}$. La longueur de cette dernière réduction est l-1 et, par récurrence, on obtient le résultat voulu. □

1.5.5. Lemme 4 : Si P est borné supérieurement et si $M\in NF$ et $N\in NF$, on a $M[x\backslash N]\in NF$.

Démonstration : par récurrence sur $\langle m-h(\tau(N)),prof(M),\|M\|\rangle$ où m est la borne supérieure des hauteurs des étiquettes vérifiant le prédicat P, prof(M) est la profondeur de M et $\|M\|$ est la taille de M. Posons, en outre, $M^* = M[x\backslash N]$ pour toute expression M.

Cas de base : $M=y^{\alpha}$. Alors, soit $y\neq x$ et $M^*=y^{\alpha}\in NF$, soit $y=x$ et $M^*=\alpha\cdot N\in NF$, puisque $N\in NF$.

Cas général :

Cas 1 : $M=y^{\alpha}$. Ce cas vient d'être examiné.

Cas 1 : $M=(\lambda y\cdot M_1)^{\alpha}$. Alors $M^*=(\lambda y\cdot M_1{}^*)^{\alpha}$ et, comme $M_1\in NF$ puisque $M\in NF$ et comme $prof(M_1) \leq prof(M)$ et $\|M_1\|<\|M\|$, on a par récurrence $M_1{}^*\in NF$. D'où $M^*\in NF$.

Cas 3 : $M = (M_1M_2)^{\alpha}$. Alors $M^* = (M_1{}^*M_2{}^*)^{\alpha}$. Comme $prof(M_1) \leq prof(M)$ et $\|M_1\|<\|M\|$, on a $M_1{}^*\in NF$. De même on a $M_2{}^*\in NF$. Deux cas se présentent :

Cas 3.1 : On n'a jamais $M_1{}^* \xrightarrow{*} (\lambda y\cdot P)^{\beta}$. Les réductions issues de M^* sont donc des réductions indépendantes de $M_1{}^*$ et $M_2{}^*$. Donc $M^*\in NF$.

Cas 3.2 : On a $M_1{}^* \xrightarrow{*} (\lambda y\cdot P)^{\beta}$.(*) Donc on a $M^* = (M_1{}^*M_2{}^*)^{\alpha} \to ((\lambda y\cdot P)^{\beta}Q)^{\alpha}$. Le problème est donc de savoir si $\alpha\bar{\beta}\cdot P[y\backslash\underline{\beta}\cdot Q]\in NF$? Puisque $M_2{}^* \xrightarrow{*} Q$, il suffit de montrer $\alpha\bar{\beta}\cdot P[y\backslash\underline{\beta}\cdot M_2{}^*]\in NF$ (voir 1.3.5 et 1.3.6). Or, comme $M_1{}^*\in NF$, le théorème de standardisation est applicable et comme $M_1{}^* \xrightarrow{*} (\lambda y\cdot P)^{\beta}$, on a $M_1{}^* \xrightarrow[st]{*} (\lambda y\cdot P)^{\beta}$. Le lemme 3 implique donc deux cas :

Cas 3.2.1 : $M_1 \xrightarrow{*} (\lambda y\cdot M_3)^{\beta}$ et $M_3{}^* \xrightarrow{*} P$. Or, comme $M = (M_1M_2)^{\alpha}\in NF$, on a $M' = \alpha\bar{\beta}\cdot M_3[y\backslash\underline{\beta}\cdot M_2]\in NF$. D'autre part, $M'[x\backslash N] = \alpha\bar{\beta}\cdot M_3{}^*[y\backslash\underline{\beta}\cdot M_2{}^*]$ en se servant des lemmes 1.3.1 et 1.3.2. D'où $M'[x\backslash N] \xrightarrow{*} \alpha\bar{\beta}\cdot P[y\backslash\underline{\beta}\cdot M_2{}^*]$ par les lemmes 1.3.3 et 1.3.4. Or, comme $M \xrightarrow{*} M'$, on a $h(\tau(M)) \leq h(\tau(M'))$. De plus $prof(M') < prof(M)$. Donc par récurrence $M'[x\backslash N]\in NF$. D'où $\alpha\bar{\beta}\cdot P[y\backslash\underline{\beta}\cdot M_2{}^*]\in NF$.

(*) et $P(\beta)$ vrai

<u>Cas 3.2.2</u> : $M_1 \overset{*}{\to} M_1' = (\cdots((x^{\gamma}A_1)^{\alpha_1}A_2)^{\alpha_2}\cdots A_n)^{\alpha_n}$ et $M_1'[x\backslash N] \overset{*}{\to} (\lambda y\cdot P)^{\beta}$
Or, comme $M_1{}^*\epsilon NF$, on a $P\epsilon NF$. D'autre part $M_1'[x\backslash N] = (\cdots(((\gamma\cdot N)A_1{}^*)^{\alpha_1}\cdots A_n^*)^{\alpha_n}$.
D'où, par le lemme 2, on a $h(\tau(\gamma\cdot N)) \leq h(\beta)$. En résumé :

$$h(\tau(N)) \leq h(\tau(\gamma\cdot N)) \leq h(\beta) < h(\underline{\beta}) \leq h(\tau(\underline{\beta}\cdot M_2{}^*))$$

D'où par récurrence $\alpha\bar{\beta}\cdot P[y\backslash\underline{\beta}\cdot M_2{}^*]\epsilon NF$. □

<u>1.5.6. Proposition</u> : Si P est borné supérieurement, alors toute expression M est fortement normalisable.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur la taille de M.

<u>Cas 1</u> : $M = x^{\alpha}$. Alors $M\epsilon NF$.

<u>Cas 2</u> : $M = (\lambda y\cdot M_1)$. On a $M_1\epsilon NF$ par récurrence et donc $M\epsilon NF$.

<u>Cas 3</u> : $M = (M_1M_2)^{\alpha}$. Par récurrence $M_1\epsilon NF$ et $M_2\epsilon NF$. Si on n'a jamais $M_1 \overset{*}{\to} (\lambda x\cdot M_3)^{\beta}$, alors les réductions de M sont donc des réductions indépendantes de M_1 et M_2 et donc $M\epsilon NF$. Si $M_1 \overset{*}{\to} (\lambda x\cdot M_3)^{\beta}$, le seul problème est de montrer que $\alpha\bar{\beta}\cdot M_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot M_2]\epsilon NF$. Mais comme $M_1\epsilon NF$, on a $M_3\epsilon NF$ et par le lemme précédent, on a $\alpha\bar{\beta}\cdot M_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot M_2]\epsilon NF$. □

1.6 <u>Le théorème de Church-Rosser</u> :

<u>Théorème</u> : Si $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$, alors il existe Q tel que $N \overset{*}{\to} Q$ et $P \overset{*}{\to} Q$.

<u>Démonstration</u> : Soient $M = M_0 \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} \cdots \xrightarrow{R_n} M_n = N$ et $M = P_0 \xrightarrow{S_1} P_1 \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} P_m = P$ les deux réductions $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$. Considérons les prédicats P_1 et P_2 définis par :

$P_1(\alpha)$ vrai ssi $\exists j$ tel que $1\leq i\leq n$ et $\alpha = \text{degré}(R_i)$

$P_2(\alpha)$ vrai ssi $\exists j$ tel que $1\leq j\leq m$ et $\alpha = \text{degré}(S_j)$

Soit P le prédicat obtenu par réunion de P_1 et P_2, c'est à dire $P(\alpha)$ vrai ssi $P_1(\alpha)$ ou $P_2(\alpha)$ est vrai. Alors P est borné supérieurement et M est fortement normalisable. Or les deux réductions $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$ sont deux réductions autorisées par ce prédicat. Donc, comme M est fortement normalisable, l'expression M à la propriété Church-Rosser (voir 1.3) et donc il existe Q tel que $N \overset{*}{\to} Q$ et $P \overset{*}{\to} Q$. □

1.7. Le théorème de standardisation : (*)

Théorème : Si $M \overset{*}{\to} N$, alors $M \underset{st}{\overset{*}{\to}} N$.

Démonstration : Soient $M = M_0 \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} \cdots \xrightarrow{R_n} M_n = N$ la réduction $M \overset{*}{\to} N$. Considérons le prédicat P défini par :

$P(\alpha)$ vrai ssi $\exists i$ tel que $1 \leq i \leq n$ et $\alpha = \text{degré}(R_i)$.

On a P borné supérieurement et donc M fortement normalisable. Or la réduction $M \overset{*}{\to} N$ est autorisée par ce prédicat P. Donc, comme M est fortement normalisable, le théorème de standardisation s'applique (voir 1.4) et on a $M \xrightarrow[st]{*} N$. □

1.8. Le théorème des développements finis :

Nous introduisons la notion de radical créé qui fera pendant à celle de radical résidu (voir chapitre I) et nous montrons les propriétés E et E^+ (voir Curry & Feys [14] et Hindley [18]), encore appelées théorèmes des développements finis par Barendregt [5] et Mitschke [27]. Dans cette partie, nous utiliserons une substitution étendue aux contextes dont la signification est intuitivement évidente.

1.8.1. Radicaux créés ; réductions relatives à un ensemble de radicaux ; réductions complètes d'un ensemble de radicaux :

Définition : Si $M \overset{R}{\to} N$, tout radical de N, qui n'est pas un résidu d'un radical de M, est dit *créé par la contraction de R* dans M, ou plus simplement *créé par R*.

Définition : Soit F un ensemble de radicaux de M. Une *réduction* est *relative à F* si elle ne consiste qu'en la contraction de résidus de radicaux de F.

Donc, soit $M = M_0 \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} \cdots \xrightarrow{R_n} M_n = N$ une telle réduction. Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, le radical R_i est un résidu d'un radical de F dans M.

Définition : Soit F un ensemble de radicaux de M. Toute réduction $M \overset{*}{\to} N$ relative à F telle que N ne contient plus de radicaux résidus de radicaux de F est appelée une *réduction complète de F*. On la notera $M \overset{F}{\to} N$.

(*) 1.6 et 1.7 sont montrés dans Λ, mais sont aussi vrais par les mêmes démonstrations dans Λ_e quelquesoit P.

1.8.2 Les résidus conservent le degré :

Proposition : Si $M \xrightarrow{R} N$ et si S est un radical de M, le (s) résidu(s) de S dans N ont un même degré que S.

Démonstration : par cas selon la position relative de R et S. Posons $R = ((\lambda x \cdot A)^{\alpha} B)^{\beta}$ et $S = ((\lambda y \cdot C)^{\gamma} D)^{\delta}$.

Cas 1 : R et S sont disjoints. Alors S a un résidu unique dans N, qui lui est identique, donc de même degré.

Cas 2 : Si S contient strictement R, le radical A est contenu dans C ou dans D et le résidu unique de S dans N est de la forme $((\lambda y \cdot C')^{\gamma} D')^{\delta}$ où soit C, soit D est différent de C, ou de D. Ce résidu a bien même degré γ que S.

Cas 3 : Si S = R, alors S n'a pas de résidu dans N.

Cas 4 : Si R contient S dans A, alors S a un résidu unique $((\lambda y \cdot C[x \backslash \underline{\alpha} \cdot B])^{\gamma}\, D[x \backslash \underline{\alpha} \cdot B])^{\gamma'}$ dans N, où seul l'étiquette δ peut être modifiée. Le degré γ de ce résidu de S est inchangé.

Cas 5 : Si R contient S dans B, alors il y a autant de résidus de S dans N que d'occurrences de x dans A. Et chacun de ces résidus est de la forme $((\lambda y \cdot C)^{\gamma} D)^{\delta'}$, où seule l'étiquette δ' peut être modifiée. A nouveau, le degré demeure inchangé. □

Corollaire : Si $M \xrightarrow{*} N$, les degrés des résidus dans N d'un radical R de M sont identiques au degré de R.

1.8.3. Norme et ordre sur les étiquettes :

Nous introduisons les norme élémentaire suivante sur les étiquettes :

$$\begin{cases} \|a\| = 1 & \text{si } a \in E_0 \quad \text{et} \quad \alpha, \beta \in E' \\ \|\alpha\beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\| & \\ \|\overline{\alpha}\| = \|\underline{\alpha}\| = \|\alpha\| + 1 & \end{cases}$$

La taille de α, $\|\alpha\|$, est donc la somme du nombre de lettres contenues dans α et du nombre de soulignements et surlignements. En outre, nous considérons l'*ordre* strict partiel suivant sur les étiquettes de E :

$$\begin{cases} \alpha < \beta\bar{\alpha}\gamma \\ \alpha < \beta\underline{\alpha}\gamma \\ \alpha < \gamma \quad \text{si} \quad \alpha<\beta<\gamma \end{cases}$$

où α,β,γ sont dans E. L'ordre est bien strict, puisque $\alpha<\beta$ implique $\|\alpha\| < \|\beta\|$.

1.8.4. Radicaux créés :

Lemme 1 : Soit M une expression non étiquetée. Si M n'est pas un radical et si $M \xrightarrow{R} N$ ou $R = (\lambda x{\cdot}A)B$ et N est un radical, alors M ne peut être que de l'une des deux formes suivantes :

1) $M = (\lambda x{\cdot}A)BD$ où $A = \lambda y{\cdot}C$
2) $M = (\lambda x{\cdot}A)BD$ où $A = x$ et $B = \lambda y{\cdot}C$

où C et D sont deux expressions quelconques.

Démonstration : Posons $N = (\lambda y{\cdot}P)Q$, $R' = A[x\backslash B]$ et $M = C[R]$. Raisonnons par cas sur la forme du contexte $C[\ ]$.

Cas 1 : $C[\ ] = [\ ]$. Alors $M = C[R] = R$ et ce cas est impossible puisque M n'est pas un radical.

Cas 2 : $C[\ ] = \lambda t{\cdot}C'[\ ]$. Dans ce cas, nous avons $N = C[R'] = \lambda t{\cdot}C'[R']$. Ce cas est encore impossible, puisqu'alors $N \neq (\lambda y{\cdot}P)Q$.

Cas 3 : $C[\ ] = M'C'[\ ]$. Alors, on a $N = C[R'] = M'C'[R']$. Comme $N = (\lambda y{\cdot}P)Q$, on a $M' = \lambda y{\cdot}P$ et $Q = C'[R']$. D'où, $M = C[R] = (\lambda y{\cdot}P)C'[R]$ et nous avons encore une impossibilité, car M n'est pas un radical.

Cas 4 : $C[\ ] = C'[\ ]M'$. Comme $C[R'] = (\lambda y{\cdot}P)Q$, nous devons avoir $M' = Q$ et $C'[R'] = \lambda y{\cdot}P$. Donc deux cas se présentent :

Cas 4.1 : $C'[\ ] = \lambda y{\cdot}C_1[\ ]$. Mais, ce cas est impossible car, alors, $M = C[R] = (\lambda y{\cdot}C_1[R])Q$ et M est un radical.

Cas 4.2. : $C'[\ ] = [\ ]$. Alors, nous avons $R' = \lambda y{\cdot}P$, c'est à dire $A[x\backslash B] = \lambda y{\cdot}P$. Et il est clair, par un raisonnement par cas sur A, que les deux seuls cas possibles sont :

1) $A = \lambda y{\cdot}C$ et $C[x\backslash B] = P$
2) $A = x$ et $B = \lambda y{\cdot}C$, $P = C$. □

Lemme 2 : Si $M[x\backslash N]$ est un radical et si M n'est pas un radical et $M \neq x$, on a $M = xB$ et $N = \lambda y \cdot A$.

Démonstration : immédiate par cas sur M. Les cas M variable et M abstraction sont tout de suite éliminés. Il reste donc $M = PB$. Un nouveau raisonnement par cas sur P donne le résultat attendu. □

Lemme 3 : Si $M = C[R]$ et $N = C'[S]$, si $M \overset{R}{\to} N$ et si S est un radical créé par $R = (\lambda x \cdot A)B$, on a un des trois cas suivants :

1) $C[\ \ ] = C'[[\ \ ]D]$ et $A = \lambda y \cdot C$
2) $C[\ \ ] = C'[[\ \ ]D]$ et $A = x$, $B = \lambda y \cdot C$
3) $A = C_1[xD]$, $B = \lambda y \cdot C$ et $C'[\ \ ] = C[C_1[\ \ ][x\backslash B]]$

Démonstration : par cas selon les positions relatives de S et du contractum $R' = A[x\backslash B]$ de R dans N.

Cas 1 : R' et S sont deux sous-expressions disjointes de N. Alors S existait dans M et ce cas est impossible.

Cas 2 : S contient R'. Soit $M = C'[S']$; on a S' qui n'est pas un radical, qui contient le radical R et $S' \overset{R}{\to} S$. D'après le lemme 1, on a un des deux cas suivants :

Cas 2.1 : $S' = (\lambda x \cdot A)BD$ où $A = \lambda y \cdot C$

Cas 2.2 : $S' = (\lambda x \cdot A)BD$ où $A = x$ et $B = \lambda y \cdot C$

Cas 3 : $R' = A[x\backslash B]$ contient S. Or S n'est pas une sous-expression d'une occurrence de B dans $A[x\backslash B]$, car sinon S ne serait pas créé par R. Il existe donc une sous-expression A_1 de A telle que $A_1[x\backslash B] = S$. De plus, $A_1 \neq x$ et A_1 n'est pas un radical, car sinon S n'est pas créé par R. D'après le lemme 2, on a $A_1 = xD$ et $B = \lambda y \cdot C$. Si on pose $A = C_1[A_1]$, on a le résultat voulu. □

Nous revenons, à présent, au λ-calcul étiqueté où nous nous servons des lemmes 1,2,3 qui, bien sûr, y demeurent valables. Posons degré $(((\lambda x \cdot M)^{\alpha} N)^{\beta}) = \alpha$

Proposition : Si $M \overset{R}{\to} N$ et si S est un radical de N créé par R, on a degré(R) < degré(S).

Démonstration : selon les cas du lemme 3. Posons $R = ((\lambda x\cdot A)^{\alpha}B)^{\beta}$.

Cas 1 : Dans M, on a $(((\lambda x\cdot A)^{\alpha}B)^{\beta}D)^{\delta}$ où $A = (\lambda y\cdot C)^{\gamma}$. Alors $S = ((\beta\bar{\alpha}\cdot A[x\backslash\underline{\alpha}\cdot B])\ D)^{\delta}$, c'est à dire : $S = ((\lambda y\cdot C[x\backslash\underline{\alpha}\cdot B])^{\beta\bar{\alpha}\gamma}\ D)^{\delta}$ et degré(R) = $\alpha < \beta\bar{\alpha}\gamma$ = degré(S).

Cas 2 : Dans M, on a $(((\lambda x\cdot A)^{\alpha}B)^{\beta}D)^{\delta}$ où $A = x^{\xi}$ et $B = (\lambda y\cdot C)^{\gamma}$. Alors $S = ((\beta\bar{\alpha}\cdot A[x\backslash\underline{\alpha}\cdot B])\ D)^{\delta}$, c'est à dire : $S = ((\lambda y\cdot C)^{\beta\bar{\alpha}\xi\underline{\alpha}\gamma}\ D)^{\delta}$ et degré(R) = $\alpha<\beta\bar{\alpha}\xi\underline{\alpha}\gamma$ = degré(S).

Cas 3 : Dans A, on a $(x^{\xi}\ D)^{\delta}$ et $B = (\lambda y\cdot C)^{\gamma}$. Alors $S = (x^{\xi}\ D)^{\delta}[x\backslash\underline{\alpha}\cdot(\lambda y\cdot C)^{\gamma}]$, c'est à dire : $S = ((\lambda y\cdot C)^{\xi\underline{\alpha}\gamma}\ D')^{\delta}$ et, à nouveau, degré(R) = $\alpha < \xi\underline{\alpha}\gamma$ = degré(S). □

1.8.5. Le théorème des développements finis :

Notation : Nous introduisons un prédicat INIT sur les expressions étiquetées, qui est tel que INIT(M) est vérifié ssi les étiquettes de toutes les sous-expressions de M sont des lettres prises dans E_0 qui sont différentes deux à deux.

Lemme : Si INIT(M) est vrai et si $M \overset{*}{\rightarrow} N$, un radical S de N est un résidu d'un radical R de M ssi degré(R) = degré(S).

Démonstration : S'il existe R dans M ayant S comme résidu dans N, on a degré(R) = degré(S) par 1.8.2. Réciproquement, raisonnons sur la longueur l de la réduction $M \overset{*}{\rightarrow} N$. Si l=0, on a M=N et si on on a degré(R) = degré(S), on a R=S puisque la condition INIT(M) est vérifiée. Si l>0, posons $M \overset{*}{\rightarrow} N' \xrightarrow{R'} N$. Supposons qu'il existe R dans M tel que degré(R) = degré(S). Alors S ne peut être créé par la contraction de R'. En effet, on aurait degré(R') < degré(S) et, donc $\|$degré(S)$\|>1$; ce qui est impossible puisque degré(R) = degré(S) implique degré(S)$\in E_0$, comme INIT(M) est vrai. Donc S est un résidu d'un radical S' de N' tel que degré(R) = degré(S')et, par récurrence, S' est un résidu de R. Donc S est un résidu de R. □

<u>Théorème</u> : Soit F un ensemble de radicaux dans une expression M, alors :

1) toutes les réductions relatives à F se terminent sur une même expression N.

2) les résidus dans N de tout radical A de M sont indépendants de la réduction complète de F considérée.

<u>Démonstration</u> : Supposons M non étiqueté pour simplifier l'exposé. Considérons U étiqueté tel que INIT(U) et M obtenu à partir de U en éliminant les étiquettes. Soit C l'ensemble de radicaux de U qui correspond à l'ensemble F de M. Et soit P le prédicat défini par :

$P(\alpha)$ vrai ssi $\exists R \in C$ tel que α = degré(R).

Le lemme précédent nous indique que les réductions issues de U sont isomorphes aux réductions relatives à F issues de M. Or P est borné supérieurement. Donc U est fortement normalisable. La propriété Church-Rosser du λ-calcul étiqueté implique donc l'existence d'une forme normale V unique telle que $U \overset{*}{\rightarrow} V$. Soit N l'expression non étiquetée correspondant à V. L'expression N ne contient plus de résidus de F, puisque V ne contient plus de résidus de C.

Comme INIT(U) est vrai, le lemme précédent indique que tout radical S de V est résidu d'un radical R de U ssi degré(R) = degré(S), ce qui est indépendant de la réduction utilisée de U à V. □

<u>Corollaire</u> : *"Le lemme des déplacements parallèles"* (parallel moves lemma") : Soient F_1 et F_2 deux ensembles de radicaux dans M. Si $M \xrightarrow{F_1} M_1$ et $M \xrightarrow{F_2} M_2$, on a $M_1 \xrightarrow{F'_2} N$ et $M_2 \xrightarrow{F'_1} N$ où F'_2 et F'_1 sont les ensembles de résidus respectivement de F_2 et F_1 dans M_1 et M_2.

<u>Démonstration</u> : évidente en appliquant le théorème précédent à l'ensemble $F_1 \cup F_2$ de radicaux de M. □

2) CORRESPONDANCE ENTRE LE λ-CALCUL USUEL ET LE λ-CALCUL ETIQUETE :

Nous allons introduire une équivalence sur les réductions du λ-calcul ordinaire et l'espace quotient correspondant correspondra exactement à l'ensemble des réductions étiquetées. Le point de vue intuitif est le suivant . Dans le λ-calcul non étiqueté, les expressions de départ et d'arrivée d'une réduction semblent très mal caractériser la réduction effectuée. Bien sûr, la propriété Church-Rosser autorise la contraction des "mêmes" radicaux dans des ordres différents. Mais il se produit des effets plus désastreux dus à des "accidents syntaxiques" où des réductions qui contractent des radicaux manifestement "différents". donnent une même expression. Ainsi si on pose $I = \lambda x{\cdot}x$ et $\Delta = \lambda x{\cdot}xx$, on a $I(Ix) \to Ix$ en contractant le radical externe ou le radical interne ; de même $\Delta\Delta \to \Delta\Delta$, mais aussi $\Delta\Delta \to \Delta\Delta \to \Delta\Delta$; etc... . Notre relation d'équivalence visera donc à éliminer les "accidents syntaxiques", car il semble que le λ-calcul étiqueté fait disparaître de tels phénomènes.

2.1. Quelques opérations élémentaires sur les réductions :

Afin de définir ces opérations, nous devons avoir la possibilité de nommer des réductions. Nous utiliserons les symboles $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \ldots$ et si nous voulons préciser la réduction de nom $\mathcal{D}$, nous écrirons :

$$(\mathcal{D}) \ : \ M \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} \cdots \xrightarrow{R_n} M_n$$

Dans cette partie, nous considérons des réductions dont chaque étape élémentaire peut être la contraction simultanée, en parallèle, de plusieurs radicaux. D'après le théorème des développements finis, cette notion a un sens. Il suffit d'effectuer à chaque étape une réduction complète de l'ensemble de radicaux considérés. Par ailleurs, le même théorème nous assure que la notion de résidu est toujours cohérente sur une telle étape. Nous utilisons les lettres $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \cdots$ pour désigner des ensembles de radicaux. Donc une réduction $\mathcal{D}$ pourra aussi s'écrire :

$$(\mathcal{D}) \ : \ M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \cdots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n .$$

<u>Définition</u> : Soient $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ deux réductions telles que l'expression d'arrivée de $\mathcal{D}_1$ est l'expression de départ de $\mathcal{D}_2$. Le produit $\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2$ des deux réductions :

$$(\mathcal{D}_1) : M = M_0 \xrightarrow{F_1} M_1 \xrightarrow{F_2} \cdots \xrightarrow{F_n} M_n$$

$$(\mathcal{D}_2) : M_n \xrightarrow{F_{n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{F_{n+2}} \cdots \xrightarrow{F_m} M_n$$

est la réduction :

$$(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2) : M = M_0 \xrightarrow{F_1} M_1 \xrightarrow{F_2} \cdots \xrightarrow{F_m} M_m$$

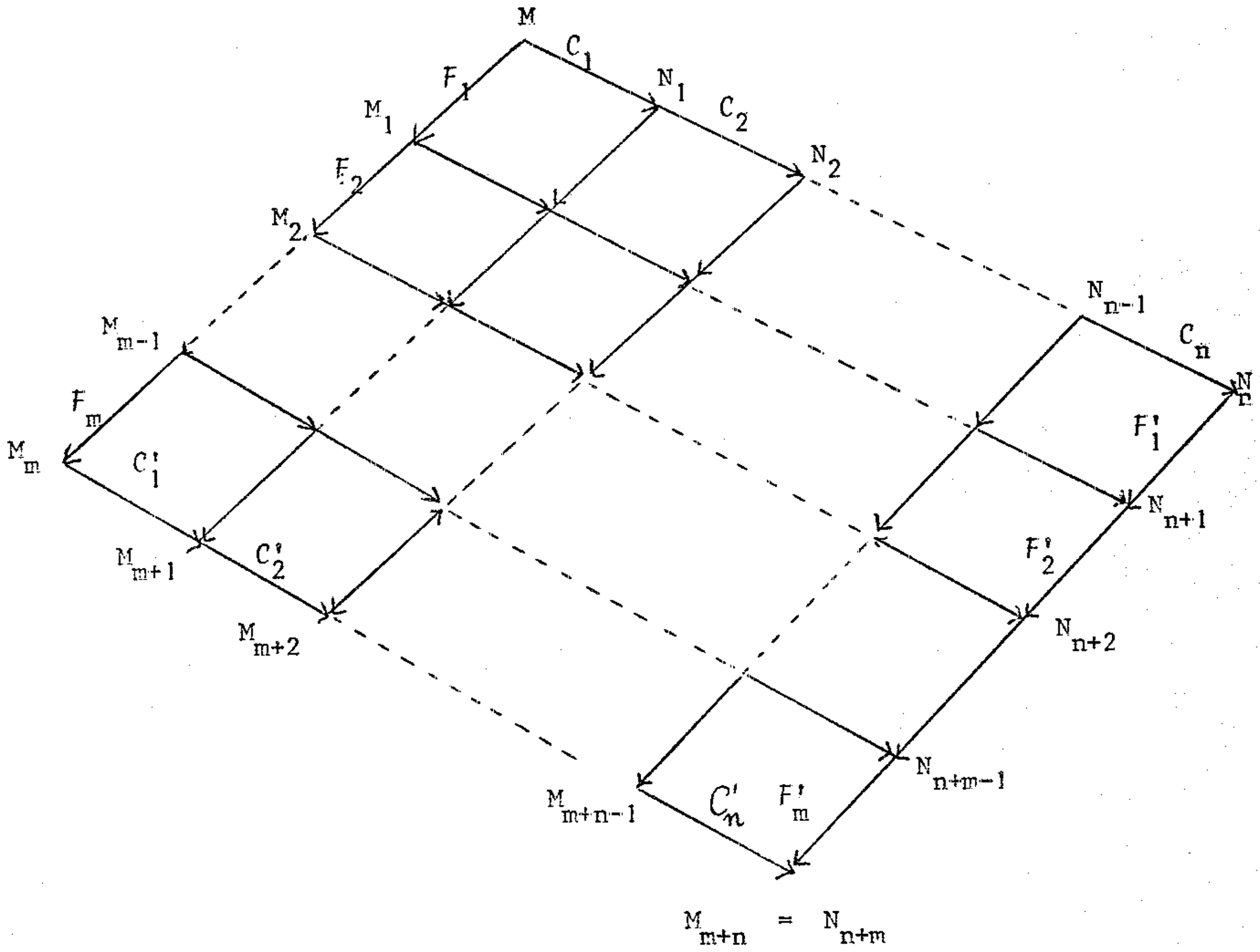
Nous dirons aussi que $\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2$ est obtenu par <u>*composition*</u> des réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Cette opération est, bien sûr, associative et admet comme élément neutre <u>*la réduction vide*</u>, qui n'effectue la contraction d'aucun radical. Nous <u>*noterons*</u> 0 la réduction vide.

Mais revenons au théorème des développements finis. Nous l'avons montré comme dérivant des théorèmes de Church-Rosser et de normalisation forte dans le λ-calcul étiqueté. Mais Church [11] et Curry & Feys [14] l'utilisait pour démontrer le théorème de Church-Rosser. Plus exactement, ils se servaient de son corollaire, le lemme des déplacements parallèles qui pour toute paire de réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles que :

$$(\mathcal{D}_1) : M = M_0 \xrightarrow{F_1} M_1 \xrightarrow{F_2} \cdots \xrightarrow{F_m} M_m$$

$$(\mathcal{D}_2) : M = N_0 \xrightarrow{G_1} N_1 \xrightarrow{G_2} \cdots \xrightarrow{G_n} N_n$$

implique le pavage suivant :



où chaque parallèlogramme élémentaire représente une application du lemme des déplacements parallèles.

<u>Définition</u> : Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions issues d'une même expression, le quotient $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ est la réduction définie sur la figure précédente. On dira aussi que $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ est la <u>*réduction résidue de $\mathcal{D}_1$ par $\mathcal{D}_2$*</u>.
Plus formellement,

a) Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions $M \xrightarrow{F_1} M_1$ et $M \xrightarrow{F_2} M_2$, alors $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ est la réduction $M_2 \xrightarrow{F'_1} N$ où F'_1 est l'ensemble des résidus de F_1 dans M_2, le long de la réduction $\mathcal{D}_2$.

b) $((\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2)/\mathcal{D}) = ((\mathcal{D}_1/\mathcal{D})\ ;\ (\mathcal{D}_2/(\mathcal{D}/\mathcal{D}_1)))$

c) $(\mathcal{D}/(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2)) = ((\mathcal{D}/\mathcal{D}_1)/\mathcal{D}_2)$

d) $(\mathcal{O}/\mathcal{D}) = \mathcal{O}$ et $(\mathcal{D}/\mathcal{O}) = \mathcal{D}$

Définition : La réduction $\mathcal{D}_1$ est *contenue dans* la réduction $\mathcal{D}_2$ ssi $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ est la réduction vide. Nous notons cette relation : $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_2$.

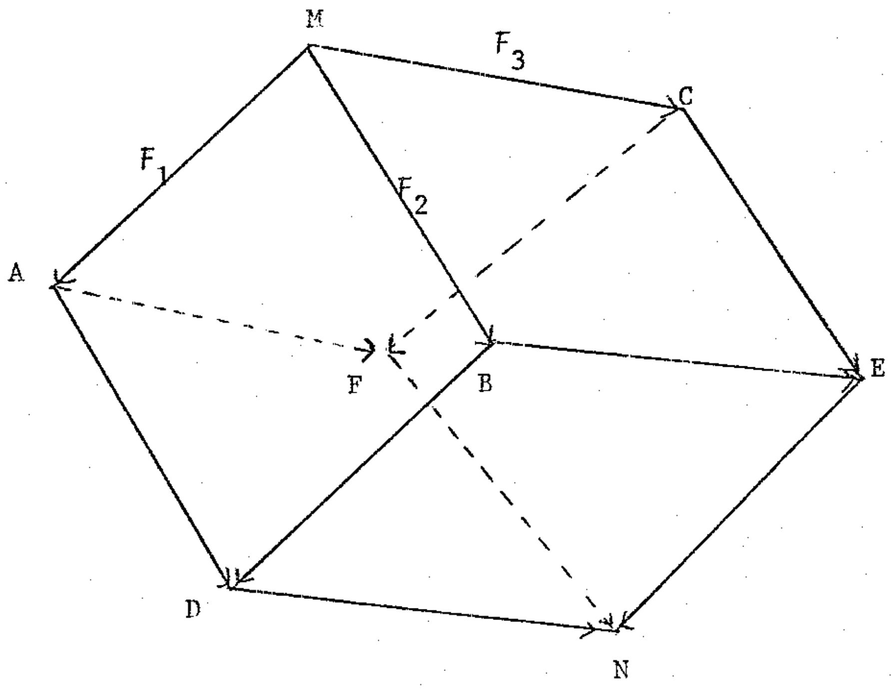
On a donc $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_2$ ssi $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{O}$.

Définition : Les réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont *équivalentes* ssi on a $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1$. Nous écrivons alors $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$.

On a donc $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ ssi $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{O}$ et $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \mathcal{O}$. De plus, si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ désignent les réductions $M \xrightarrow{*} M_1$ et $M \xrightarrow{*} M_2$, la relation $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ implique $M_1 = M_2$. Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, si on reprend le cas où $M = I(Ix)$ et $I = \lambda x{\cdot}x$, si R est le radical externe de M et S le radical interne, les deux réductions $M \xrightarrow{R} Ix$ et $M \xrightarrow{S} Ix$ ne sont pas équivalentes. De même, si $\Delta = \lambda x{\cdot}xx$, les deux réductions $\Delta\Delta \to \Delta\Delta$ et $\Delta\Delta \to \Delta\Delta \to \Delta\Delta$ ne sont pas équivalentes.

2.2. Corollaires des définitions précédentes :

2.2.1. Lemme du cube : Soient F_1, F_2, F_3 des ensembles de radicaux dans une expression M. Si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont les trois réductions $M \xrightarrow{F_1} A$, $M \xrightarrow{F_2} B$, $M \xrightarrow{F_3} C$, on a la figure suivante :



où on a les réductions suivantes :

$(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$: $A \to D$ $\quad$ $(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3)$: $C \to E$
$(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$: $B \to D$ $\quad$ $(\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_1)$: $A \to F$
$(\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2)$: $B \to E$ $\quad$ $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3)$: $C \to F$.

$$((\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2)/(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)) = ((\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)) : D \to N$$
$$((\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3)/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3)) = ((\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)/(\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2)) : E \to N$$
$$((\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_1)) = ((\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3)/(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3)) : F \to N$$

Démonstration : immédiate par application du théorème des développements finis. Il suffit de considérer les réductions complètes de $F_1 \cup F_2$, $F_2 \cup F_3$, $F_3 \cup F_1$ et $F_1 \cup F_2 \cup F_3$. □

Corollaire : Si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont les trois réductions $M \overset{*}{\to} A$, $M \overset{*}{\to} B$, $M \overset{*}{\to} C$, on a le cube de la figure précédente dont toutes les arêtes, excepté MA,MB,MC, ont la même signification.

Démonstration : par récurrence sur la somme des longueurs des réductions $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ car les cubes élémentaires correspondant à chaque étape élémentaire de réductions se composent bien. □

2.2.2. Proposition : La relation $\leq$ est un préordre.

Démonstration : On a bien sûr $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}$. Le seul problème est la transitivité. Supposons $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_3$. On a donc $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = 0$ et $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3 = 0$. Utilisons le lemme du cube. Comme $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = 0$, on a $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)/(\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2) = 0$. Or le lemme indique que $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)/(\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2) = (\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3)/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3)$. D'où $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3)/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3) = 0$. Puisque $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3 = 0$, on en déduit $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3 = 0$, c'est à dire $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_3$. □

2.2.3. Proposition : La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration : immédiate puisque $\leq$ est un préordre. □

2.2.4. Proposition : La relation ~ définit une congruence vis à vis du produit, c'est à dire si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_4$, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2) \sim (\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4)$.

Démonstration : immédiate d'après la définition de l'équivalence. Plus formellement, si on pose $\mathcal{D}'_1 = \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3$, on a :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4)/(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2) &= ((\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4)/\mathcal{D}_1)/\mathcal{D}_2 && \text{(par définition du quotient)}\\
&= ((\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_1);(\mathcal{D}_4/\mathcal{D}'_1))/\mathcal{D}_2 && \text{(idem)}\\
&= (\mathcal{O};(\mathcal{D}_4/\mathcal{O}))/\mathcal{D}_2 && \text{(car } \mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_3\text{)}\\
&= \mathcal{D}_4;\mathcal{D}_2 = \mathcal{O} && \text{(car } \mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_4\text{)}
\end{aligned}$$

De même, on montre $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2)/(\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4) = \mathcal{O}$. □

2.2.5. Proposition : La relation ~ définit une congruence vis à vis du quotient, c'est à dire si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_4$, on a $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2) \sim (\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_4)$.

Démonstration :

1) Si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, on a $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}) \sim (\mathcal{D}_2/\mathcal{D})$. En effet, en appliquant le lemme du cube, on a :

$$(\mathcal{D}_2/\mathcal{D})/(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}) = (\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}/\mathcal{D}_1)$$

Or $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_1$. D'où $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \mathcal{O}$, ce qui implique $(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}/\mathcal{D}_1) = \mathcal{O}$.
Donc $(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}) \leq (\mathcal{D}_1/\mathcal{D})$. De même, on a $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}) \leq (\mathcal{D}_2/\mathcal{D})$.

2) Si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, on a $(\mathcal{D}/\mathcal{D}_1) \sim (\mathcal{D}/\mathcal{D}_2)$. En fait, on a alors $\mathcal{D}/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}_2$.
En effet, par le lemme du cube, on a :

$$((\mathcal{D}/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)) = ((\mathcal{D}/\mathcal{D}_2)/(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)).$$

Or $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \mathcal{O}$ et $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{O}$, puisque $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. On a donc :

$$((\mathcal{D}/\mathcal{D}_1)/\mathcal{O}) = ((\mathcal{D}/\mathcal{D}_2)/\mathcal{O})$$

D'où $\mathcal{D}/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}_2$. □

2.2.6 Proposition : $(\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1))\sim(\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2))$

Démonstration : Posons $\mathcal{D}_1'=\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2'=\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$. Les définitions du produit et quotient nous donnent :

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_1')/(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2') &= ((\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_1')/\mathcal{D}_1)/\mathcal{D}_2' \\ &= (\mathcal{D}_2';(\mathcal{D}_1'/\mathcal{D}_1'))/\mathcal{D}_2'. \\ &= (\mathcal{D}_2';0)/\mathcal{D}_2' = \mathcal{D}_2'/\mathcal{D}_2' = 0\end{aligned}$$

De même, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2')/(\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_1') = 0$. D'où $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2')\sim(\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_1')$. □

2.2.7. Proposition : On a $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$ ssi il existe $\mathcal{D}$ tel que $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}_2$.

Démonstration : Si $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$, posons $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$. D'après la proposition précédente, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim(\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2))$. Or $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$ implique $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2) = 0$. D'où $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}_2$. Réciproquement, s'il existe $\mathcal{D}$ tel que $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}_2$, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\leq\mathcal{D}_2$; ce qui entraine $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$ par définition de $\leq$. □

2.2.8. Proposition : (Berry). On a $(\mathcal{D};\mathcal{D}_1)\sim(\mathcal{D};\mathcal{D}_2)$ ssi $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$. Autrement dit, la relation ~ est simplifiable à gauche. De même, $(\mathcal{D};\mathcal{D}_1)\leq(\mathcal{D};\mathcal{D}_2)$ ssi $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$.

Démonstration : Comme ~ est une congruence pour le produit, on a $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$ qui implique $(\mathcal{D};\mathcal{D}_1)\sim(\mathcal{D};\mathcal{D}_2)$. Réciproquement, on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{D};\mathcal{D}_2)/(\mathcal{D};\mathcal{D}_1) &= ((\mathcal{D};\mathcal{D}_2)/\mathcal{D})/\mathcal{D}_1 \\ &= ((\mathcal{D}/\mathcal{D});(\mathcal{D}_2/(\mathcal{D}/\mathcal{D})))/\mathcal{D}_1 \\ &= (0;(\mathcal{D}_2/0))/\mathcal{D}_1 \\ &= \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1\end{aligned}$$

en appliquant la définition de l'opération quotient et en remarquant que $\mathcal{D}\sim\mathcal{D}$. Donc $(\mathcal{D};\mathcal{D}_1)\sim(\mathcal{D};\mathcal{D}_2)$ implique $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = 0$ et par symétrie $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = 0$, c'est à dire $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$. De même si $(\mathcal{D};\mathcal{D}_1)\leq(\mathcal{D};\mathcal{D}_2)$, on a $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$. □

2.2.9. Proposition : (Berry). Soit $\approx$ la relation définie de la manière suivante :

1) $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$ si $\mathcal{D}_1 : M \xrightarrow{F_1} M_1 \xrightarrow{F_2} N$ et $\mathcal{D}_2 : M \xrightarrow{F_2'} M_2 \xrightarrow{F_1'} N$ où F_1' et F_2' sont les résidus de F_1 et F_2 dans M_2 et M_1.

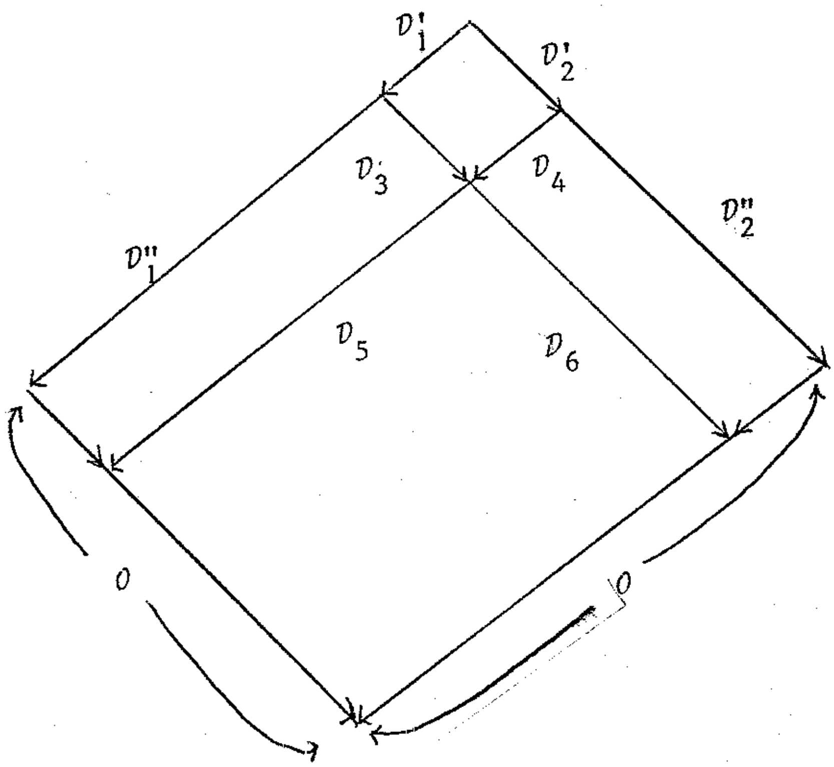
2) $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$ si $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}_3;\mathcal{D};\mathcal{D}_4)$, $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{D}_3,\mathcal{D}';\mathcal{D}_4)$ et $\mathcal{D} \approx \mathcal{D}'$

3) $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$ s'il existe $\mathcal{D}_3$ tel que $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_2 \approx \mathcal{D}_3$.

Alors on a $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ ssi $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$.

Démonstration :

1) On a d'abord $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ qui implique $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$. Raisonnons par récurrence sur la somme des longueurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ que nous écrirons $\|\mathcal{D}_1\| + \|\mathcal{D}_2\|$. Si $\mathcal{D}_1 = 0$ ou $\mathcal{D}_2 = 0$, alors prenons par exemple $\mathcal{D}_1 = 0$ et $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, ce qui implique $\mathcal{D}_2 = 0$ puisque $\mathcal{D}_1 = 0$. Donc $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$. Sinon, les réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se décomposent en $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1';\mathcal{D}_1''$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2';\mathcal{D}_2''$ où $\mathcal{D}_1'$ et $\mathcal{D}_2'$ sont deux réductions de la forme $M \xrightarrow{F_1} M_1$ et $M \xrightarrow{F_2} M_2$. Posons $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2'/\mathcal{D}_1'$, $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_1'/\mathcal{D}_2'$, $\mathcal{D}_5 = \mathcal{D}_1''/\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_6 = \mathcal{D}_2''/\mathcal{D}_4$. Si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, on a $\mathcal{D}_5 \sim \mathcal{D}_6$, $\mathcal{D}_1'' \sim (\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_6)$ et $(\mathcal{D}_4;\mathcal{D}_5) \sim \mathcal{D}_2''$ par définition (voir figure ci-contre). Donc, comme $\sim$ est une congruence (voir 2.2.4), on a $\mathcal{D}_1'' \sim (\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_5)$ et $\mathcal{D}_2'' \sim (\mathcal{D}_4;\mathcal{D}_6)$. Or on a $\|\mathcal{D}_1''\| + \|\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_5\|$, $\|\mathcal{D}_2''\| + \|\mathcal{D}_4;\mathcal{D}_6\|$ et $\|\mathcal{D}_5;\mathcal{D}_6\|$



strictement inférieurs à $\|\mathcal{D}_1\|+\|\mathcal{D}_2\|$. Donc par récurrence on a $\mathcal{D}''_1\approx(\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_5)$, $\mathcal{D}''_2\approx(\mathcal{D}_4;\mathcal{D}_6)$ et $\mathcal{D}_5\approx\mathcal{D}_6$. Or par définition, on a $(\mathcal{D}'_1;\mathcal{D}_3)\sim(\mathcal{D}'_2;\mathcal{D}_4)$. On a donc : $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1;\mathcal{D}''_1\approx\mathcal{D}'_1;\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_5\approx\mathcal{D}'_1;\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_6\approx\mathcal{D}'_2;\mathcal{D}_4;\mathcal{D}_6\approx\mathcal{D}'_2;\mathcal{D}''_2 = \mathcal{D}_2$ et par transitivité $\mathcal{D}_1\approx\mathcal{D}_2$.

2) Montrons que $\mathcal{D}_1\approx\mathcal{D}_2$ implique $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$. Raisonnons par récurrence sur la longueur de la définition de la relation $\mathcal{D}_1\approx\mathcal{D}_2$. Le seul problème est quand $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont de la forme $\mathcal{D}_1 \xrightarrow{F_1} M_1 \xrightarrow{F'_2} N$ et $\mathcal{D}_2 : M \xrightarrow{F_2} M_2 \xrightarrow{F'_1} N$ où F'_1 et F'_2 sont des résidus de F_1 et F_2 dans M_2 et M_1. Ceci impose $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = 0$ et $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = 0$. Donc $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$. Dans les cas 2 et 3, la récurrence s'applique et les propriétés de congruence et de transitivité de $\sim$ donnent la réponse. $\square$

En fait, Berry [7] montre cette propriété pour une légère modification de la relation $\approx$ et dans le cadre des schémas de programmes récursifs. Mais la démonstration est la même. Enfin, nous remarquons que l'on a aussi $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$ ssi, pour tout $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{D}/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}_2$. En effet, la proposition 2.2.5 nous donne un sens et si $\mathcal{D}/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}_2$ pour tout $\mathcal{D}$, cela veut dire que $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_2 = 0$ et $0 = \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$, c'est à dire $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$. Cette définition de la relation $\sim$ est peut être supérieure à celle que nous avons prise, car elle montre que nous nous intéressons aux classes de réductions où l'opération quotient est cohérente. Nous voulons donc que la notion de résidu soit particulièrement cohérente.

2.3. Réductions standard et réductions équivalentes :

2.3.1. Lemme : Soit $M \xrightarrow{S} M' \xrightarrow{*} N$ une réduction standard. Si R est un radical de M à gauche de S, alors R a un résidu (unique) dans N.

Démonstration : par récurrence sur la taille M.

Cas 1 : $M = x$. Impossible car M ne contient pas de radicaux.

Cas 2 : $M = \lambda x\cdot M_1$. On a $M' = \lambda x\cdot M'_1$, $N = \lambda x\cdot N_1$ et $M_1 \xrightarrow{S} M'_1 \xrightarrow{*} N_1$. Dans M_1, le radical R est à gauche de S. Donc par récurrence, on obtient le résultat voulu.

<u>Cas 3</u> : $M = M_1M_2$. On a alors deux cas :

<u>Cas 3.1</u> : La réduction $M \xrightarrow[st]{*} N$ consiste en des réductions séparées de M_1 et M_2, donc est de la forme $M_1M_2 \xrightarrow[st]{*} N_1M_2 \xrightarrow[st]{*} N_1N_2 = N$. Alors, soit R et S sont dans le même M_i où $i=1,2$ et, par récurrence, un résidu unique de R subsiste dans N_i, donc dans N ; soit R est dans M_1 et S est dans M_2, alors la réduction $M \xrightarrow[st]{*} N$ est de la forme $M_1M_2 \xrightarrow[st]{*} M_1N_2 = N$ et R subsiste tel quel dans N ; soit R=M et N tout entier est le résidu de R.

<u>Cas 3.2</u> : La réduction $M \xrightarrow[st]{*} N$ est de la forme :

$$M = M_1M_2 \xrightarrow[st]{*} (\lambda x\cdot P_1)P_2 \to P_1[x\backslash P_2] \xrightarrow[st]{*} N$$

Comme cette réduction est standard, on a $M_2 = P_2$ et, d'après la proposition 1.4.3, on a $\mathrm{Fon}(M_1) = (\lambda x\cdot P_1)$ et $M_1 \xrightarrow[norm]{*} (\lambda x\cdot P_1)$.

La réduction $M \xrightarrow[st]{*} N$ s'écrit donc :

$$M = M_1M_2 \xrightarrow[norm]{*} (\lambda x\cdot P_1)M_2 \to P_1[x\backslash M_2] \xrightarrow[st]{*} N$$

D'où S est le radical le plus à gauche de M et donc R ne peut être plus à gauche. Ce cas est impossible. □

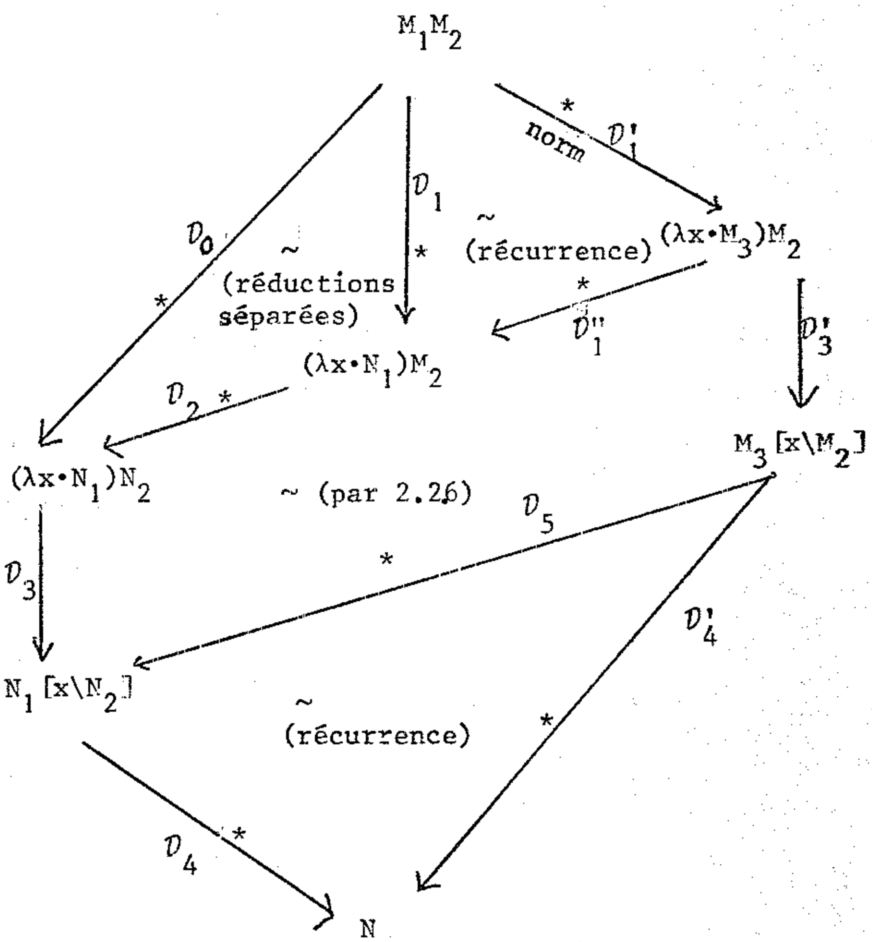
<u>2.3.2. Proposition</u> : Si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sont deux réductions standards, on a $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ ssi $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.

<u>Démonstration</u> : D'abord, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ entraîne $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Réciproquement, soient $M \xrightarrow[st]{*} A$ et $M \xrightarrow[st]{*} B$ les réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Considérons le premier endroit où ces réductions divergent. On a donc $M \overset{*}{\to} N \overset{R}{\to} N_1 \xrightarrow[st]{*} A$ et $M \overset{*}{\to} N \overset{S}{\to} N_2 \xrightarrow[st]{*} B$. Donc $R \neq S$. Supposons, par exemple, R à gauche de S. D'après le lemme précédent, R a un résidu dans B et on n'a pas $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. □

<u>2.3.3. Proposition</u> : Toute réduction admet une réduction standard équivalente.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de reprendre la démonstration de 1.4.4

en introduisant l'équivalence $\sim$. Le seul cas intéressant est le cas 3.2, toutes les autres alternatives fonctionnant trivialement par récurrence. La situation est résumée par le diagramme ci-contre. On a $\mathcal{D}_0 \sim (\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}_2)$ car la réduction $M_1 M_2 \overset{*}{\to} (\lambda x \cdot N_1) N_2$ se décompose en $M_1 \overset{*}{\to} (\lambda x \cdot N_1)$ et $M_2 \overset{*}{\to} N_2$. De plus, par récurrence, la réduction $\mathcal{D}_1$ est équivalente à sa réduction standard associée $\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}''_1$. Or, par 2.2.6, on a $(\mathcal{D}''_1 ; \mathcal{D}_2 ; \mathcal{D}_3) \sim (\mathcal{D}'_3 ; \mathcal{D}_5)$. Et, par



récurrence, à nouveau, la réduction $\mathcal{D}_5 ; \mathcal{D}_4$ est équivalente à sa réduction standard associée $\mathcal{D}'_4$. Comme $\sim$ définit une congruence vis à vis du produit, on a :

$$\mathcal{D}_0;\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4 \sim \mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4$$
$$\sim \mathcal{D}_1';\mathcal{D}_1'';\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4$$
$$\sim \mathcal{D}_1';\mathcal{D}_3';\mathcal{D}_5;\mathcal{D}_4$$
$$\sim \mathcal{D}_1';\mathcal{D}_3';\mathcal{D}_4'. \qquad \square$$

2.3.4. Corollaire : Chaque classe d'équivalence définie par la relation $\sim$ admet un représentant canonique unique qui est la réduction standard appartenant à la classe.

Démonstration : par application de 2.3.2 et 2.3.3. $\square$

2.4. Le sup-treillis des β-réductions équivalentes :

Nous considérons les classes d'équivalences $[\mathcal{D}]$ définies par la relation $\sim$, que nous munissons de l'*ordre* $\leq$ défini par :

$[\mathcal{D}] \leq [\mathcal{D}']$ ssi $\mathcal{D}\leq\mathcal{D}'$

Nous utilisons les mêmes symboles pour ces deux ordres différents sans ambiguité. *Appelons* $\mathcal{R}(M)$ l'ensemble des réductions issues de M.

Proposition : Pour tout M, l'ensemble $\mathcal{R}(M)/\sim$ a une structure de sup-treillis. Plus exactement :

1) $\mathcal{R}(M)/\sim$ admet un élément minimal $[\mathcal{O}]$

2) Pour toute paire de réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, les classes $[\mathcal{D}_1]$ et $[\mathcal{D}_2]$ ont un plus petit commun manorant $[\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)]$ (qui est identique à $[\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)]$).

Démonstration :

1) On a bien sûr $\mathcal{O}\leq\mathcal{D}$ par définition de $\leq$.

2) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux réductions issues de M. On a $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ puisque $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_1$. De même, $\mathcal{D}_2\leq\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$. Or, par 2.2.6, on a $\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)\sim\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$. D'autre part, supposons $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2\leq\mathcal{D}$. On a, par définition :

$$(\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1))/\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1/\mathcal{D});((\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}/\mathcal{D}_1)).$$

Or, comme $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D}_1/\mathcal{D} = 0$. Par ailleurs, le lemme du cube (voir 2.2) nous donne :

$$((\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}/\mathcal{D}_1)) = ((\mathcal{D}_2/\mathcal{D})/(\mathcal{D}_1/\mathcal{D})) = 0$$

puisque $\mathcal{D}_1/\mathcal{D} = 0$ et $\mathcal{D}_2/\mathcal{D} = 0$, comme $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}$. Donc $(\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)) \leq \mathcal{D}$. De même, $(\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)) \leq \mathcal{D}$. □

Remarquons enfin que l'ensemble $\mathcal{R}(M)/\sim$ n'est pas toujours un inf-treillis. En effet, posons $Y = (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx))$, $Y_n = f^n(Y)$ et $K_a = \lambda x \cdot a$. Prenons $M = (\lambda x \cdot K_a(xY))K_b$. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux réductions :

$$(\mathcal{D}_1) \ : \ M = (\lambda x \cdot K_a(xY))K_b \to K_a(K_bY) \to K_a b$$

$$(\mathcal{D}_2) \ : \ M = (\lambda x \cdot K_a(xY))K_b \to (\lambda x \cdot a)K_b$$

Les réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont pas de plus grand commun minorant. En effet, leurs seuls minorants commun sont les réductions $\mathcal{D}_n$ suivantes :

$$(\mathcal{D}_n) \ : \ M = (\lambda x \cdot K_a(xY))K_b \xrightarrow{*} (\lambda x \cdot K_a(xY_n))K_b$$

qui n'admettent pas d'élément maximal.

2.5. Réductions étiquetées et réductions équivalentes :

Jusqu'à présent, nous avons considérées des réductions non étiquetées équivalentes. II est bien clair que cette notion s'étend immédiatement au λ-calcul étiqueté, puisqu'elle repose sur le lemme des déplacements parallèles qui est également vrai dans le λ-calcul étiqueté.

2.5.1. Définition : Pour toute expression U étiquetée, nous appelons $\tau^{-1}(U)$ l'expression non étiquetée correspondante. Formellement, on a :

$$\begin{cases} \tau^{-1}(x^\alpha) = x \\ \tau^{-1}((\lambda x \cdot U)^\alpha) = \lambda x \cdot \tau^{-1}(U) \\ \tau^{-1}((UV)^\alpha) = (\tau^{-1}(U)\ \tau^{-1}(V)) \end{cases}$$

si U,V sont des expressions étiquetées.

2.5.2. Lemme : Si $U \overset{*}{\to} V$, on a $\|\tau(U)\| \leq \|\tau(V)\|$

Démonstration : évidente (voir 1.8.3 pour la définition de la norme. □

2.5.3. Proposition : Pour toutes expressions U,V de Λ_e telles que $U \overset{*}{\to} V$, il existe une et une seule réduction standard $U \xrightarrow[st]{*} V$.

Démonstration : par le théorème de stnadardisation, on connait l'existence d'au moins une réduction $U \xrightarrow[st]{*} V$ si $U \overset{*}{\to} V$. Soit l la longueur de cette réduction standard et soit $\|U\|$ la taille de U. Effectuons une récurrence sur $<l,\|U\|>$

Cas de base : $U = x^{\alpha}$. Alors seule la réduction vide est possible entre U et $V = U = x^{\alpha}$.

Cas général :

Cas 1 : $U = x^{\alpha}$. Déjà vu.

Cas 2 : $U = (\lambda x{\cdot}U_1)^{\alpha}$. Alors $V = (\lambda x{\cdot}V_1)^{\alpha}$ et $U_1 \xrightarrow[st]{*} V_1$ dont la longueur est l. Donc, par récurrence, la réduction $U_1 \xrightarrow[st]{*} V_1$ est unique. D'où l'unicité de la réduction $U \xrightarrow[st]{*} V$.

Cas 3 : $U = (U_1U_2)^{\alpha}$. Dans ce cas, la réduction $U \xrightarrow[st]{*} V$ considérée est soit de la forme ;

$$U = (U_1U_2)^{\alpha} \xrightarrow[st]{*} (V_1U_2)^{\alpha} \xrightarrow[st]{*} (V_1V_2)^{\alpha} = V$$

soit de la forme :

$$U = (U_1U_2)^{\alpha} \xrightarrow[norm]{*} ((\lambda x{\cdot}U_3)^{\beta}U_2)^{\alpha} \to \alpha\bar{\beta}{\cdot}U_3[x\backslash\underline{\beta}{\cdot}U_2] \xrightarrow[st]{*} V$$

où $Fon(U_1) = (\lambda x{\cdot}U_3)^{\beta}$ (voir le théorème de standardisation). Nous affirmons, de plus, que toutes les réductions standard $U \xrightarrow[st]{*} V$ sont de la même forme. En effet, supposons qu'il en existe deux $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de forme différente. On aurait, pour $\mathcal{D}_1$, l'expression V telle que $V = (V_1V_2)^{\alpha}$ et donc $\tau(V)=\alpha=\tau(U)$.

Pour $\mathcal{D}_2$, on aurait en se servant du lemme :

$$\|\tau(U)\| = \|\alpha\| < \|\tau(\alpha\bar{\beta}{\cdot}U_3[x\backslash\underline{\beta}{\cdot}U_2])\| \leq \|\tau(V)\|$$

et donc $\tau(U) \neq \tau(V)$. Doù contradiction. Nous avons donc deux cas selon la forme de la réduction $U \xrightarrow[st]{*} V$ considérée initialement.

Cas 3.1.: La réduction $U \xrightarrow[st]{*} V$ est de la première forme. Par récurrence, les réductions $U_1 \xrightarrow[st]{*} V_1$ et $U_2 \xrightarrow[st]{*} V_2$ sont uniques et donc la réduction standard entre U et V est également unique.

Cas 3.2 : La réduction $U \xrightarrow[st]{*} V$ est de la deuxième forme. Toutes les réductions standards entre U et V, qui sont donc de cette forme effectuent une réduction initiale commune :

$$U = (U_1U_2)^{\alpha} \xrightarrow[norm]{*}{}' ((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}U_2)^{\alpha} \to \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$$

où $\text{Fon}(U_1) = (\lambda x\cdot U_3)^{\alpha}$. Or, par récurrence sur la longueur, il n'existe qu'une seule réduction standard entre $\alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$ et V. Donc la réduction standard entre U et V est unique. $\square$

2.5.4. Théorème : Soit M une expression non étiquetée et U une expression étiquetée telle que $M = \tau^{-1}(U)$. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux réductions $M \xrightarrow{*} N$ et $M \xrightarrow{*} P$. Considérons les deux réductions $U \xrightarrow{*} V$ et $U \xrightarrow{*} W$ qui leur sont isomorphes. On a :

1) $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ ssi $V = W$
2) $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_2$ ssi $V \xrightarrow{*} W$.

Démonstration :

1) Appelons $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ les deux réductions étiquetées $U \xrightarrow{*} V$ et $U \xrightarrow{*} W$. La proposition 2.3.3, qui demeure vraie dans le λ-calcul étiqueté, nous indique qu'il existe deux réductions standards $U \xrightarrow[st]{*} V$ et $U \xrightarrow[st]{*} W$, que nous appellerons $\mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}''_2$ telles que $\mathcal{D}'_1 \sim \mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}'_2 \sim \mathcal{D}''_2$. Donc $\mathcal{D}'_1 \sim \mathcal{D}'_2$ ssi $\mathcal{D}''_1 \sim \mathcal{D}''_2$. Par la proposition 2.3.2, comme $\mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}''_2$ sont des réductions standards, on a $\mathcal{D}''_1 \sim \mathcal{D}''_2$ ssi $\mathcal{D}''_1 = \mathcal{D}''_2$. Or, comme $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}'_2$ sont des couples de réductions isomorphes, on a $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ ssi $\mathcal{D}'_1 \sim \mathcal{D}'_2$. En résumé, $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ ssi $\mathcal{D}''_1 = \mathcal{D}''_2$. Or, d'après la proposition précédente, comme $\mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}''_2$ sont standards, on a $\mathcal{D}''_1 = \mathcal{D}''_2$ ssi $V = W$.

2) D'après 2.2.7, on a $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_2$ ssi il existe $\mathcal{D}$ telle que $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}) \sim \mathcal{D}_2$. Soit $V \xrightarrow{*} T$ la réduction étiquetée correspondant à $\mathcal{D}$. D'après le cas 1, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}) \sim \mathcal{D}_2$ ssi $T = W$. Donc, on a $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_2$ ssi $V \xrightarrow{*} W$. $\square$

3) LE SUP-TREILLIS DES β-REDUCTIONS ETIQUETEES :

Le théorème précédent et la structure de treillis induite par l'ordre $\leq$ étudiée en 2.4 donne une structure de treillis à l'ensemble des expressions étiquetées dérivables d'une certaine expression étiquetée vis à vis de la relation de réductibilité. Nous allons considérer les influences du prédicat P et des étiquettes de l'expression initiale sur cette structure. De plus, une définition récursive du plus petit majorant commun à deux expressions sera donnée.

3.1 Notations et définition :

Soit U une expression étiquetée. Nous *désignons* par $R(U,P)$ l'ensemble des réductions issues de U autorisées par le prédicat P. De même $E(U,P)$ est l'ensemble des expressions obtenues par les réductions de $R(U,P)$.

Le prédicat V sera le prédicat constant vrai. Donc $V(\alpha)$ est vrai pour toute étiquette α.

3.2. Proposition : L'ensemble $E(U,V)$ a une structure de sup-treillis vis à vis de l'ordre $\overset{*}{\rightarrow}$.

Démonstration : D'après le théorème 2.5.4, l'ensemble $E(U,V)$ muni de la relation $\overset{*}{\rightarrow}$ est isomorphe à l'ensemble $R(\tau^{-1}(U))/\sim$ muni de l'ordre $\leq$. Donc $\overset{*}{\rightarrow}$ est un ordre sur $E(U,V)$ qui induit une structure de sup-treillis sur $E(U,V)$, puisque cela est le cas pour $R(\tau^{-1}(U))/\sim$ muni de $\leq$. □

3.3. Proposition : Pour un M donné, tous les ensembles $E(U,V)$ munis de $\overset{*}{\rightarrow}$ tels que $\tau^{-1}(U) = M$ sont isomorphes entre eux.

Démonstration : immédiate puisque leur structure est isomorphe à celle de $R(\tau^{-1}(U))/\sim$ muni de $\leq$. □

3.4. Lemme : Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions de $\mathcal{R}(U,\mathcal{P})$ les réductions $\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$ sont aussi des réductions de $\mathcal{R}(U,\mathcal{P})$.

Démonstration : Dans le cas où les deux réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont de la forme $U \xrightarrow{\mathcal{F}_1} U_1$ et $U \xrightarrow{\mathcal{F}_2} U_2$. On a $\mathcal{P}(\text{degré}(R_1))$ vrai pour tout R_1 de $\mathcal{F}_1$. De même $\mathcal{P}(\text{degré}(R_2))$ vrai pour tout R_2 de $\mathcal{F}_2$. Comme les résidus conservent le degré (voir 1.8.2) les réductions $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ sont des réductions de $\mathcal{R}(U,\mathcal{P})$. Dans le cas général où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions de longueur arbitraire, une récurrence sur la somme de ces longueurs donne le résultat voulu. □

3.5. Proposition : Pour tous $U,\mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$ a une structure de sup-treillis vis à vis de l'ordre $\xrightarrow{*}$.

Démonstration : L'ensemble $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$ est inclus dans $\mathcal{E}(U,\mathcal{V})$. Prenons U_1 et U_2 quelconques dans $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux réductions $U \xrightarrow{*} U_1$ et $U \xrightarrow{*} U_2$ de $\mathcal{R}(U,\mathcal{P})$. Les réductions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont aussi dans $\mathcal{R}(U,\mathcal{V})$. Or, l'expression V obtenue par la réduction $\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_1)$ est le plus petit commun majorant de U_1 et U_2 vis à vis de l'ordre $\xrightarrow{*}$, d'après le théorème 2.5.4 et la proposition 2.4. Le lemme précédent indique que $\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2;\mathcal{D}_1)$ est aussi dans $\mathcal{R}(U,\mathcal{P})$. Donc V est dans $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$. Cet ensemble a donc une structure de sup-treillis pour l'ordre $\xrightarrow{*}$. De plus, le plus petit commun majorant de deux expressions dans $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$ est le même que celui de ces deux expressions dans $\mathcal{E}(U,\mathcal{V})$. □

3.6. Expression du plus petit commun majorant de deux expressions de $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$:

3.6.1. Notation : Posons $\mathcal{E}'(U,\mathcal{P}) = \{V \mid V \in \mathcal{E}(U,\mathcal{P}) \text{ et } \tau(U) \neq \tau(V)\}$

3.6.2. Lemme 1 : Quelquesoit U et $\mathcal{P}$, si $\mathcal{E}'(U,\mathcal{P})$ n'est pas vide, alors $\mathcal{E}'(U,\mathcal{P})$ a un élément minimum vis à vis de l'ordre $\xrightarrow{*}$. Plus précisément, cet élément minimum est la première expression V, obtenue par la réduction normale issue de U, telle que $\tau(V)\neq\tau(U)$. Formellement, on a $U = (U_1U_2)^\alpha$ et $V = \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$ où $(\lambda x\cdot U_3)^\beta = \mathrm{Fon}(U_1)$.

Démonstration : D'abord, l'expression U ne peut être de la forme x^α ou $(\lambda x\cdot U_1)^\alpha$, car alors $E'(U,P)$ est vide. Donc $U = (U_1U_2)^\alpha$, soit W tel que $U \overset{*}{\to} W$ et $\tau(U)\neq\tau(W)$. Par le théorème de standardisation, on a $U \xrightarrow[st]{*} W$ et cette réduction est de la forme :

$$U = (U_1U_2)^\alpha \xrightarrow[norm]{*} ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha \to \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \xrightarrow[st]{*} W$$

où $(\lambda x\cdot U_3)^\beta = \mathrm{Fon}(U_1)$, puisque $\tau(U)\neq\tau(W)$. En effet, la seule alternative serait une réduction de la forme :

$$U = (U_1U_2)^\alpha \xrightarrow[st]{*} (W_1U_2)^\alpha \xrightarrow[st]{*} (W_1W_2)^\alpha = W$$

Ce qui est impossible, car alors $\tau(U)=\tau(W)$. Posons $V = \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$. On a $U \xrightarrow[norm]{*} V$ et V est donc indépendant de W. □

3.6.3. Lemme 2 : Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions de la forme $U \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(U)$ et $U \overset{*}{\to} V$, alors $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ est la réduction $V \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(V)$.

Démonstration : par récurrence sur l_1+l_2 où l_1 est la longueur de $\mathcal{D}_1$ et l_2 le nombre d'étapes de réductions parallèles de $\mathcal{D}_2$. Si $l_1 = 0$ ou $l_2 = 0$, la proposition est triviale. Si $l_1>0$ et $l_2>0$, nous nous ramenons au cas où $l_2 = 1$, car la proposition se compose trivialement sur l_2. On a donc $U \overset{F}{\to} V$ où F est un ensemble de radicaux de U. Soit R le radical le plus à gauche de U. La réduction $\mathcal{D}_1$ est de la forme $U \overset{R}{\to} U_1 \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(U)$. Soit F' l'ensemble des résidus de F dans U_1. Soient $\mathcal{D}_1'$ et $\mathcal{D}_2'$ les deux réductions $U_1 \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(U)$ et $U_1 \xrightarrow{F'} V_1$. On a deux cas :

Cas 1 : $R\in F$. Par le lemme des déplacements parallèles (voir 1.8), on a $U_1 \xrightarrow{F'} V_1 = V$. Or, par récurrence, on a $\mathcal{D}_1'/\mathcal{D}_2'$ qui est la réduction $V \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(V)$. Comme $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1'/\mathcal{D}_2'$, la réduction $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ est la réduction $V \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(V)$.

Cas 2 : $R\notin F$. Le radical R a un seul résidu R' dans V qui est le radical le plus à gauche de V. Par le lemme des déplacements parallèles, on a $U_1 \xrightarrow{F'} V_1$ et $V \xrightarrow{R'} V_1$. Donc, par récurrence, la réduction $V_1 \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(V_1)$ est la réduction $\mathcal{D}_1'/\mathcal{D}_2'$. Et la réduction $V \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(V_1)$, qui coïncide avec $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$, est la réduction $V \xrightarrow[norm]{*} \mathrm{Fon}(V)$ si $\mathrm{Fon}(V) = \mathrm{Fon}(V_1)$. Il suffit donc de montrer $\mathrm{Fon}(V)\neq V$. Or, comme $l_1>0$, on a $U\neq\mathrm{Fon}(U)$; c'est à dire $U = (U_1U_2)^\alpha$. Comme $R\notin F$, on a $V = (V_1V_2)^\alpha$ et donc $V\neq\mathrm{Fon}(V)$. □

3.6.4. Proposition : Pour tous U_1,U_2 dans $E(U,P)$, le plus petit commun majorant $\mathrm{Max}(U_1,U_2)$ est défini récursivement par :

$$\begin{cases} \mathrm{Max}(x^\alpha,x^\alpha) = x^\alpha \\ \mathrm{Max}((\lambda x\cdot V)^\alpha,(\lambda x\cdot W)^\alpha) = (\lambda x\cdot \mathrm{Max}(V,W))^\alpha \\ \mathrm{Max}((V_1V_2)^\alpha,(W_1W_2)^\alpha) = (\mathrm{Max}(V_1,W_1)\mathrm{Max}(V_2,W_2))^\alpha \\ \mathrm{Max}((V_1V_2)^\alpha,\alpha\bar{\beta}\cdot W) = \mathrm{Max}(\alpha\bar{\beta}\cdot W,(V_1V_2)^\alpha) = \alpha\bar{\beta}\cdot \mathrm{Max}(V_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot V_2],W) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{où } (\lambda x\cdot V_3)^\beta = \mathrm{Fon}(V_1). \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit de montrer que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions de $R(U,P)$ de la forme $U \xrightarrow{*} V$ et $U \xrightarrow{*} W$, alors $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ sont de la forme $V \xrightarrow{*} \mathrm{Max}(V,W)$ et $W \xrightarrow{*} \mathrm{Max}(V,W)$. Par la proposition 3.5, on peut prendre P borné supérieurement et autorisant $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ puisque le plus petit majorant ne varie pas avec P. Alors U est fortement normalisable et soit prof(U) sa profondeur. Effectuons une récurrence sur $<\mathrm{prof}(U),\|U\|>$ où $\|U\|$ est la taille de U. Si prof(U) = 0, on a $U = V = W = \mathrm{Max}(V,W)$ et $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{O}$. Sinon :

Cas 1 : $\tau(U)=\tau(V)=\tau(W)$. On a, à nouveau, plusieurs cas selon U :

Cas 1.1 : $U = x^\alpha$. Alors prof(U) = 0 et ce cas est déjà vu.

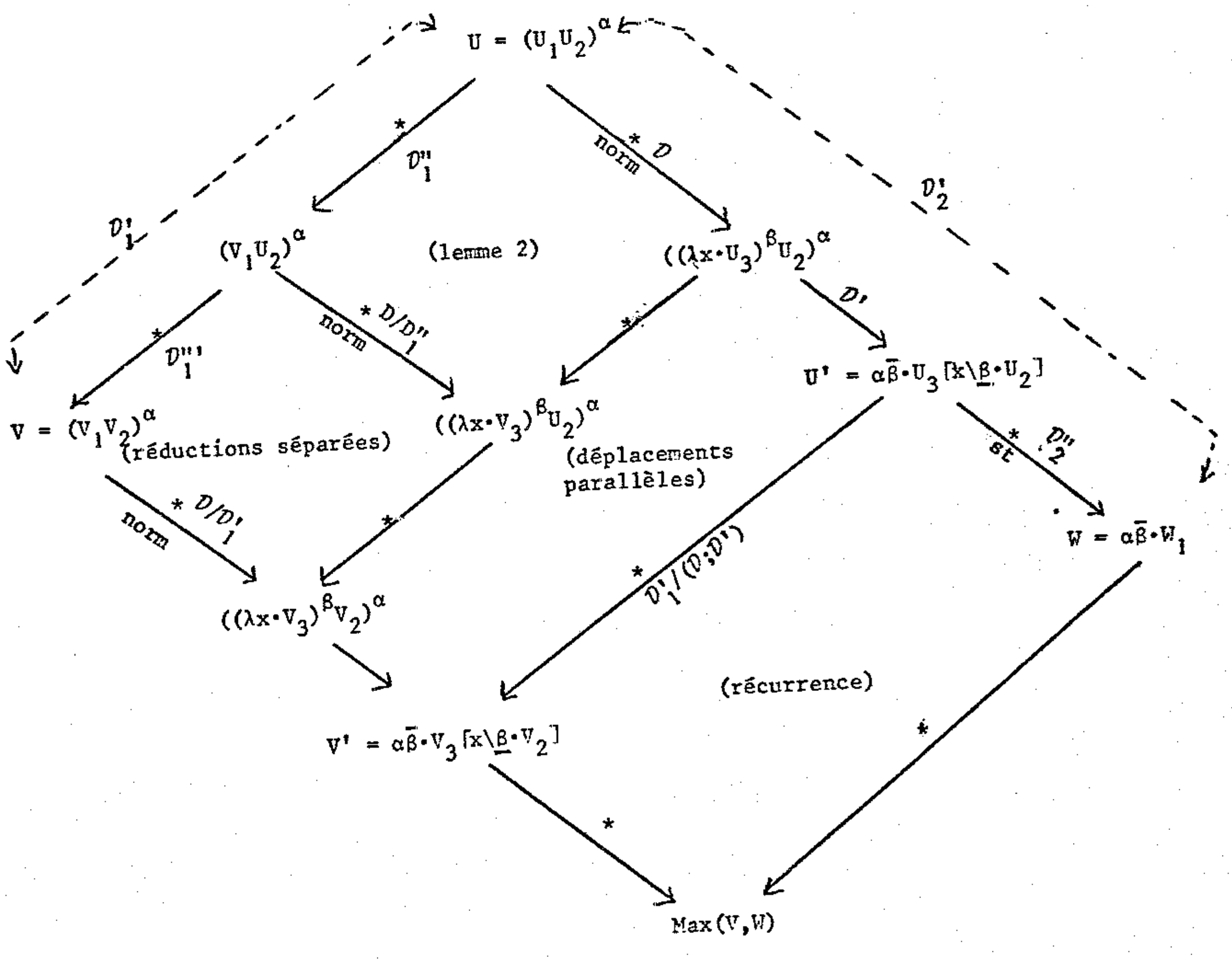
Cas 1.2 : $U = (\lambda x\cdot U_1)^\alpha$. Alors $V = (\lambda x\cdot V_1)^\alpha$ et $W = (\lambda x\cdot W_1)^\alpha$ où $U_1 \xrightarrow{*} V_1$ et $U_1 \xrightarrow{*} W_1$ sont deux réductions $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ isomorphes à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. De plus, $\mathrm{prof}(U) = \mathrm{prof}(U_1)$. Donc, comme $\|U_1\|<\|U\|$, on a par récurrence $\mathrm{Max}(V_1,W_1)$ atteint par $\mathcal{D}'_1/\mathcal{D}'_2$ et $\mathcal{D}'_2/\mathcal{D}'_1$. Doù $\mathrm{Max}(V,W) = (\lambda x\cdot \mathrm{Max}(V_1,W_1))^\alpha$ est atteint par $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$ qui sont isomorphes à $\mathcal{D}'_1/\mathcal{D}'_2$ et $\mathcal{D}'_2/\mathcal{D}'_1$.

Cas 1.3 : $U = (U_1U_2)^\alpha$. Alors $V =(V_1V_2)^\alpha$ et $W = (W_1W_2)^\alpha$ où $U_1 \xrightarrow{*} V_1$, $U_1 \xrightarrow{*} W_1$ et $U_2 \xrightarrow{*} V_2$, $U_2 \xrightarrow{*} W_2$. Ce cas est analogue au précédent car $\mathrm{prof}(U_1)\leq \mathrm{prof}(U)$, $\mathrm{prof}(U_2)\leq\mathrm{prof}(U)$ et $\|U_1\|<\|U\|,\|U_2\|<\|U\|$.

Cas 2 : $\tau(U)\neq\tau(V)$, $\tau(U)\neq\tau(W)$. Considérons les deux réductions standards $U \xrightarrow[st]{*} V$ et $U \xrightarrow[st]{*} W$. Le lemme 1 indique que ces réductions $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ sont telles que $\mathcal{D}'_1 = \mathcal{D};\mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D};\mathcal{D}''_2$ où $\mathcal{D}$ est la réduction :
$U = (U_1\ U_2)^\alpha \xrightarrow[norm]{*} ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha \rightarrow \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] = U'$ avec $\mathrm{Fon}(U_1) = (\lambda x\cdot U_3)^\beta$ et où $\mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}''_2$ sont les deux réductions $U' \xrightarrow{*} V$ et $U' \xrightarrow{*} W$. De plus, par 2.5.4,

on a $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}'_2$. Donc, comme la relation ~ est une congruence pour l'opération quotient (voir 2.2.5), on a $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 \sim (\mathcal{D};\mathcal{D}''_1)/(\mathcal{D};\mathcal{D}''_2) = \mathcal{D}''_1/\mathcal{D}''_2$. De même , $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}''_2/\mathcal{D}''_1$. Or prof(U')<prof(U). Donc, par récurrence, $\mathcal{D}''_2/\mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}''_1/\mathcal{D}''_2$ sont deux réductions $V \xrightarrow{*} \mathrm{Max}(V,W)$ et $W \xrightarrow{*} \mathrm{Max}(V,W)$. Par 2.5.4, comme des réductions équivalentes donnent la même expression étiquetée, on a $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ qui sont deux réductions $V \xrightarrow{*} \mathrm{Max}(V,W)$ et $W \xrightarrow{*} \mathrm{Max}(V,W)$.

<u>Cas 3</u> : $\tau(U)=\tau(V)$, $\tau(U)\neq\tau(W)$. Le lemme 1 entraîne que la réduction standard $U \xrightarrow{*} W$ de nom $\mathcal{D}'_2$ est telle que $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D};\mathcal{D}';\mathcal{D}''_2$ où $\mathcal{D},\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''_2$ sont les réductions $U = (U_1U_2)^\alpha \xrightarrow[\text{norm}]{*} ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha$, $((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha \to \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] = U'$ et $U' \xrightarrow[\text{st}]{*} W$ avec $\mathrm{Fon}(U_1) = (\lambda x\cdot U_3)^\beta$.. De plus, on a $V = (V_1V_2)^\alpha$ où $U_1 \xrightarrow{*} V_1$ et $U_2 \xrightarrow{*} W_2$. La réduction $\mathcal{D}'_1$ standard $U \xrightarrow[\text{st}]{*} V$ est donc telle que $\mathcal{D}'_1 = \mathcal{D}''_1;\mathcal{D}'''_1$ où $\mathcal{D}''_1$ et $\mathcal{D}'''_1$ sont les deux réductions $(U_1U_2)^\alpha \xrightarrow[\text{st}]{*} (V_1U_2)^\alpha$ et $(V_1U_2)^\alpha \xrightarrow[\text{st}]{*} (V_1V_2)^\alpha$ (voir figure). En utilisant le lemme 2, la réduction $\mathcal{D}/\mathcal{D}''_1$ est la réduction $(V_1U_2)^\alpha \xrightarrow[\text{norm}]{*} ((\lambda x\cdot V_3)\ U_2)^\alpha$ où $\mathrm{Fon}(V_1) = (\lambda x\cdot V_3)^\beta$.. De plus, la réduction $\mathcal{D}''_1/\mathcal{D}$ est une réduction de la forme $((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha \xrightarrow{*} ((\lambda x\cdot V_3)^\beta U_2)^\alpha$ Comme les deux réductions $\mathcal{D}'''_1$ et $\mathcal{D}/\mathcal{D}''_1$ sont deux réductions indépendantes, on a



$\mathcal{D}/\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'''_1/(\mathcal{D}/\mathcal{D}''_1)$ de la forme $(V_1V_2)^{\alpha}\xrightarrow[\text{norm}]{} ((\lambda x\cdot V_3)^{\beta}V_2)^{\alpha}$ et $((\lambda x\cdot V_3)^{\beta}U_2)^{\alpha} \overset{*}{\rightarrow} ((\lambda x\cdot V_3)^{\beta}V_2)^{\alpha}$. En résumé, on a :

$$(\mathcal{D}/\mathcal{D}'_1) \ : V = (V_1V_2)^{\alpha}\xrightarrow[\text{norm}]{*} ((\lambda x\cdot V_3)^{\beta}V_2)^{\alpha} \text{ où } (\lambda x\cdot V_3)^{\beta} = \text{Fon}(V_1)$$

$$(\mathcal{D}'_1/\mathcal{D}) \ : ((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}U_2)^{\alpha} \overset{*}{\rightarrow} ((\lambda x\cdot V_3)^{\beta}V_2)^{\alpha}$$

Par le lemme des déplacements parallèles, on a :

$$(\mathcal{D}'/(\mathcal{D}'_1/\mathcal{D})): ((\lambda x\cdot V_3)^{\beta}V_2)^{\alpha} \rightarrow \alpha\bar{\beta}\cdot V_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot V_2] = V'$$

$$(\mathcal{D}'_1/(\mathcal{D};\mathcal{D}')) \ : \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \overset{*}{\rightarrow} \alpha\bar{\beta}\cdot V_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot V_2]$$

Par récurrence, comme prof(U')<prof(U), on a:

$$(\mathcal{D}'_1/\mathcal{D}'_2) = ((\mathcal{D}'_1/(\mathcal{D};\mathcal{D}'))/\mathcal{D}''_2) \ : W \overset{*}{\rightarrow} \text{Max}(V',W)$$

$$(\mathcal{D}''_2/(\mathcal{D}'_1/(\mathcal{D};\mathcal{D}'))) \ : V' \overset{*}{\rightarrow} \text{Max}(V',W).$$

Or, par définition de Max, on a Max(V,W) = Max(V',W). D'où, finalement :

$$(\mathcal{D}'_1/\mathcal{D}'_2) \ : W \overset{*}{\rightarrow} \text{Max}(V,W)$$

$$(\mathcal{D}'_2/\mathcal{D}'_1) \ : V \overset{*}{\rightarrow} \text{Max}(V,W)$$

Comme $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}_2\sim\mathcal{D}'_2$, on a également $(\mathcal{D}'_1/\mathcal{D}'_2)\sim(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}'_2/\mathcal{D}'_1)\sim(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ par la proposition 2.2.5. D'où, par 2.5.4, les réductions $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$ sont de la forme $W \overset{*}{\rightarrow} \text{Max}(V,W)$ et $V \overset{*}{\rightarrow} \text{Max}(V,W)$.

Cas 4 : $\tau(U)\neq\tau(V)$, $\tau(U)=\tau(V)$. Cas symétrique du précédent. □

3.7. Conditions d'existence d'un plus grand commun minorant de deux expressions de $E(U,P)$:

3.7.1. Définition : Si $U \overset{*}{\rightarrow} V$, la *distance* de U à V, notée d(U,V), est la longueur de la réduction standard $U\xrightarrow[\text{st}]{*} V$.

Cette définition est cohérente car la réduction $U\xrightarrow[\text{st}]{*} V$ est unique pour U et V donnés d'après 2.5.3.

<u>3.7.2. Lemme 1</u> : Si Fon(U) est défini et si $U \overset{*}{\to} V$, on a $d(V,Fon(V)) \le d(U,Fon(U))$.

<u>Démonstration</u> : Reprendre la démonstration de 3.6.3 et les deux cas $R \in F$ et $R \notin F$ nous donne les cas où d(U,Fon(U)) décroit ou reste constant. □

<u>3.7.3. Lemme 2</u> : Si $U \overset{*}{\to} (\lambda x \cdot V)^{\alpha}$, alors $U \overset{*}{\to} Fon(U) \overset{*}{\to} (\lambda x \cdot V)^{\alpha}$.

<u>Démonstration</u> : immédiate en appliquant le théorème de standardisation et la proposition 1.4.3. □

<u>3.7.4. Proposition</u> : Si $U \overset{*}{\to} V$ et si $U \overset{*}{\to} W \overset{*}{\to} V$, on a $d(W,V) \le d(U,V)$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur $\langle d(U,V), \|U\| \rangle$ où $\|U\|$ est la taille de U. Si $d(U,V) = 0$ et $U = x^{\alpha}$, on a $U = V = W = x^{\alpha}$ et donc $d(U,V) = d(W,V) = 0$. Sinon on a plusieurs cas :

<u>Cas 1</u> : $\tau(U)=\tau(V)=\tau(W)$. On a trois sous cas selon U :

<u>Cas 1.1.</u> : $U = x^{\alpha}$. Alors $V = x^{\alpha}$ et $d(U,V) = 0$. Ce cas a déjà été examiné.

<u>Cas 1.2</u> : $U = (\lambda x \cdot U_1)^{\alpha}$. Alors $V = (\lambda x \cdot V_1)^{\alpha}$, $W = (\lambda x \cdot W_1)^{\alpha}$ et $U_1 \overset{*}{\to} V_1$, $U_1 \overset{*}{\to} W_1 \overset{*}{\to} V_1$. Or $d(U,V) = d(U_1,V_1)$ et $d(W_1,V_1) = d(W,V)$. Par récurrence, on a $d(W_1,V_1) \le (d(U_1 V_1)$.

<u>Cas 1.3</u> : $U = (U_1 U_2)^{\alpha}$. Alors $V = (V_1 V_2)^{\alpha}$, $W = (W_1 W_2)^{\alpha}$ et $U_1 \overset{*}{\to} V_1$, $U_1 \overset{*}{\to} W_1 \overset{*}{\to} V_1$, $U_2 \overset{*}{\to} V_2$, $U_2 \overset{*}{\to} W_2 \overset{*}{\to} V_2$. Or $d(U,V) = d(U_1,V_1)+d(U_2,V_2)$ et $d(W,V) = d(W_1,V_1)+d(W_2,V_2)$. Par récurrence, on a $d(W_1,V_1) \le (d(U_1,V_1)$ et $d(W_2,V_2) \le d(U_2,V_2)$.

<u>Cas 2</u> : $\tau(U) \ne \tau(V)$. Par 3.6.2, on a $U \xrightarrow[st]{*} V$ de la forme :

$$U = (U_1 U_2)^{\alpha} \xrightarrow[norm]{*} ((\lambda x \cdot U_3)^{\beta} U_2)^{\alpha} \to V' = \alpha\bar{\beta} \cdot U_3[x \backslash \underline{\beta} \cdot U_2] \xrightarrow[st]{*} V$$

où $(\lambda x \cdot U_3)^{\beta} = Fon(U_1)$. Deux sous-cas se présentent :

<u>Cas 2.1</u> : $\tau(U) \ne \tau(W)$. Par 3.6.2, on a $V' \overset{*}{\to} W$ et, comme $d(V',V) < d(U,V)$, on a $d(W,V) \le d(V',V) < d(U,V)$ par récurrence.

Cas 2.2 : $\tau(U)=\tau(W)$. On a $W = (W_1W_2)^\alpha$ où $U_1 \overset{*}{\to} W_1$ et $U_2 \overset{*}{\to} W_2$. Par 3.6.2, comme $W \overset{*}{\to} V$ et $\tau(V)\neq\tau(W)$, la réduction $W \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ est de la forme :

$$W = (W_1W_2)^\alpha \xrightarrow[norm]{*} ((\lambda x\cdot W_3)^\beta W_2)^\alpha \to W' = \alpha\bar{\beta}\cdot W_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot W_2] \underset{st}{\overset{*}{\to}} V \quad \text{où}$$

$(\lambda x\cdot W_3)^\beta = \mathrm{Fon}(W_1)$. On a donc $d(U,V) = 1+d(U_1,\mathrm{Fon}(U_1))+d(V',V)$ et $d(W,V) = 1+d(W_1,\mathrm{Fon}(W_1))+d(W',V)$. Par le lemme 1, comme $U_1 \overset{*}{\to} W_1$, on a $d(W_1,\mathrm{Fon}(W_1))\leq d(U_1,\mathrm{Fon}(U_1))$. D'autre part, $U_1 \overset{*}{\to} W_1 \overset{*}{\to} (\lambda x\cdot W_3)^\alpha$. D'où, par le lemme 2, $\mathrm{Fon}(U_1) \overset{*}{\to} (\lambda x\cdot W_3)^\alpha$ ce qui implique $U_3 \overset{*}{\to} W_3$. Donc on a $V' \overset{*}{\to} W'$, puisque $U_3 \overset{*}{\to} W_3$ et $U_2 \overset{*}{\to} W_2$, en appliquant 1.3.5. Par récurrence, $d(V',V)<d(U,V)$ implique $d(W',V)\leq d(V',V)$. Donc $d(W,V)\leq d(U,V)$.

Cas 3 : $\tau(U)\neq\tau(W)$ et $\tau(U)=\tau(V)$. Ce cas est impossible car alors on ne peut avoir $W \overset{*}{\to} V$. □

A présent, la situation devient plus claire. Nous savons que pour toute paire d'expressions V et W dans $E(U,P)$, l'ensemble des minorants de V et W est dirigé. En effet, soient U_1 et U_2 deux minorants communs de V et W, on a $U \overset{*}{\to} U_1 \overset{*}{\to} V$ et $U_1 \overset{*}{\to} W$; de même $U \overset{*}{\to} U_2 \overset{*}{\to} V$ et $U_2 \overset{*}{\to} W$. Donc $U_1 \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(U_1,U_2) \overset{*}{\to} V$ et $\mathrm{Max}(U_1,U_2) \overset{*}{\to} W$; $U_2 \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(U_1,U_2) \overset{*}{\to} V$ et $\mathrm{Max}(U_1,U_2) \overset{*}{\to} W$. Il n'y a donc de plus grand commun minorant que si l'ensemble des minorants communs à V et W est borné. La remarque de 2.4. nous indique que cela peut ne pas être le cas. Or, maintenant, nous connaissons deux moyens pour borner cet ensemble : 1) utiliser un prédicat P borné supérieurement, 2) utiliser la proposition précédente en exhibant des expressions où la somme des distances d'un minorant commun de deux expression à chacune d'elles peut se borner. Nous considérons le λI-calcul étiqueté comme exemple d'application de cette seconde méthode. Par λI-calcul étiqueté, nous entendons, comme pour le λI-calcul non étiqueté, l'ensemble des λ-expressions étiquetées qui ne contiennent pas de sous-expression de la forme $(\lambda x\cdot M)^\alpha$ où x n'est pas une variable libre de M.

3.7.5. Proposition : Si P est borné supérieurement, l'ensemble $E(U,P)$ a une structure de treillis vis à vis de l'ordre $\overset{*}{\to}$.

Démonstration : On sait par 3.5 que $E(U,P)$ est un sup-treillis. Donc l'ensemble des minorants de U_1,U_2 dans $E(U,P)$ est dirigé. D'autre part, cet ensemble est fini car U est fortement normalisable puisque P est borné supérieurement (voir 1.5). Donc U_1 et U_2 ont un plus grand commun minorant dans $E(U,P)$. Remarquons en outre que $E(U,P)$ admet un élément minimal U et un élément maximal qui est la forme normale de U dans $E(U,P)$. □

3.7.6. Lemme 1 : Dans le λI-calcul étiqueté, si Fon(U) est défini et si l est la longueur d'une réduction $U \overset{*}{\rightarrow} V$, on a :

$$l+d(V,\mathrm{Fon}(V))\leq d(U,\mathrm{Fon}(U))+d(\mathrm{Fon}(U),\mathrm{Fon}(V))$$

Démonstration : Reprendre la démonstration de 3.6.3 et la condition λI-calcul nous impose que $l\leq d(\mathrm{Fon}(U),\mathrm{Fon}(V))$. □

3.7.7. Lemme 2 : Dans le λI-calcul étiqueté, si l est la longueur d'une dérivation $U \overset{*}{\rightarrow} W$, si $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et si $W \overset{*}{\rightarrow} V$, on a :

$$l+d(W,V)\leq d(U,V)$$

Démonstration : Reprendre la démonstration de 3.7.4 et la condition λI-calcul intervient dans le cas 2.2 pour imposer $l_1\leq l_2$ si l_1 et l_2 sont les longueurs des réductions :

$$((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}U_2)^{\alpha} \overset{*}{\rightarrow} ((\lambda x\cdot W_3)^{\beta}W_2)^{\alpha} \text{ et } \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \overset{*}{\rightarrow} \alpha\bar{\beta}\cdot W_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot W_2].$$

Bien entendu, dans le même cas 2.2, on doit se servir du lemme précédent. □

3.7.8. Proposition : Dans le λI-calcul étiqueté, l'ensemble $E(U,P)$ a une structure de treillis vis à vis de l'ordre $\overset{*}{\rightarrow}$.

Démonstration : On sait par 3.5 que $E(U,P)$ est un sup-treillis. L'ensemble des minorants de U_1,U_2 dans $E(U,P)$ est donc dirigé. Soit V,W dans $E(U,P)$ tels que $V \rightarrow W$ et $W \overset{*}{\rightarrow} U_1$, $W \overset{*}{\rightarrow} U_2$, on a par la proposition précédente $d(W,U_1)<d(V,U_1)$ et $d(W,U_2)<d(V,U_2)$. L'ensemble des minorants de U_1 et U_2 ne contient pas de chaine infinie croissante par l'ordre $\overset{*}{\rightarrow}$ et

admet donc un élément maximal qui est le plus grand commun minorant de U_1 et U_2. Remarquons que $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$ a un élément minimal U, mais peut ne pas avoir d'élément maximal quand U n'a pas de forme normale dans $\mathcal{E}(U,\mathcal{P})$. □

4) RADICAUX DUPLIQUES ; FAMILLES DE RADICAUX ; DEVELOPPEMENTS FINI GENERALISES :

Dans ce paragraphe, nous tentons de généraliser les notions de radicaux résidus et de réductions relatives à un ensemble de radicaux, introduites en 1.8, et nous donnons quelques corollaires immédiats. Le point de vue intuitif est le suivant. La notion de réduction relative permet de définir la notion de contraction simultanée d'un ensemble de radicaux et pour tout tel ensemble $\mathcal{F}$ dans une expression M, le théorème des développements finis nous dit que l'on peut isoler un ensemble de réductions issues de M (précisément les réductions relatives à $\mathcal{F}$) qui a les propriétés de Church-Rosser et de normalisation forte et où la notion de résidu est cohérente. Or avec notre λ-calcul étiqueté, nous réussissons à caractériser des ensembles plus larges de réductions où, notamment, des radicaux créés (et ne figurant donc pas dans l'expression de départ) peuvent intervenir, mais qui ont les propriétés Church-Rosser, de normalisation forte et de cohérence pour les résidus ! Cela semble indiquer qu'il existe une notion de développement fini, plus générale que celle définie en 1.8 et caractérisant exactement notre λ-calcul étiqueté.

4.1. Cohérence de la notion de résidu vis à vis de $\sim$:

4.1.1. Notation : Si $\mathcal{D} : M \xrightarrow{*} N$, les résidus dans N par $\mathcal{D}$ d'un radical R de M seront notés $R/\mathcal{D}$.

Cette notation est non ambigue avec $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ où $\mathcal{D}_1$ est une réduction puisque nous avons alors un radical en première position et non une réduction.

4.1.2. Proposition : Si $\mathcal{D}_1 : M \xrightarrow{*} N$ et $\mathcal{D}_2 : M \xrightarrow{*} N$ et si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, alors pour tout radical R de M, on a $R/\mathcal{D}_1 = R/\mathcal{D}_2$.

Démonstration : On a déjà rencontré cette propriété sans le dire explicitement. En effet, soit $\mathcal{D} : M \xrightarrow{R} P$; par la proposition 2.2.5, on a $\mathcal{D}/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}_2$. Donc $R/\mathcal{D}_1 = R/\mathcal{D}_2$.□

4.1.3. Proposition : Si $\mathcal{D} : M \xrightarrow{*} N$, alors pour tout radical S de N, il existe au plus un radical R de M tel que $S \in R/\mathcal{D}$.

Démonstration : corollaire immédiat de la définition de résidu et on utilise une récurrence sur la longueur de la réduction $\mathcal{D}$. □

<u>4.1.4. Corollaire</u> : Si $\mathcal{D}_1 : M \overset{*}{\to} N$, $\mathcal{D}_2 : M \overset{*}{\to} N$ et $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ et si $S \in R_1/\mathcal{D}_1$ et $S \in R_2/\mathcal{D}_2$, alors $R_1 = R_2$.

<u>Démonstration</u> : On a R_1 et R_2 uniques pour $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par 4.1.3. D'autre part, on a $R_2/\mathcal{D}_1 = R_2/\mathcal{D}_2$ puisque $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ en utilisant 4.1.2. Donc $S \in R_1/\mathcal{D}_1$ et $S \in R_2/\mathcal{D}_1$, ce qui implique $R_1 = R_2$ par 4.1.3. □

<u>4.2. Familles de radicaux ; définition</u> :

Posons $\Delta = \lambda x \cdot xx$ et $I = \lambda x \cdot x$ et considérons les réductions issues de $M = \Delta(IIx)$ représentées par la figure ci-contre. Les radicaux R_1, R_2, R_3 qui se trouvent dans les expressions N, P, Q ne sont pas des résidus d'un radical de M et sont donc créés au cours des réductions $M \overset{*}{\to} N$, $M \overset{*}{\to} P$ et

$$\begin{tikzcd}
 & M = \Delta(IIx) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(IIx)(IIx) \arrow[d] \arrow[dr] & & Q = \Delta\underset{R_3}{\underline{(Ix)}} \arrow[ddl] \\
N = \underset{R_1}{\underline{(Ix)}}(IIx) \arrow[dr] & P = (IIx)\underset{R_2}{\underline{(Ix)}} \arrow[d] & \\
 & S = \underset{R_4}{\underline{(Ix)}}\,\underset{R_5}{\underline{(Ix)}} &
\end{tikzcd}$$

$M \overset{*}{\to} Q$. Pourtant, ces radicaux ont quelque chose en commun. En effet R_1 et R_3 ont un résidu R_4 en commun dans S par les réductions $N \overset{*}{\to} S$ et $Q \overset{*}{\to} S$; de même R_2 et R_3 ont R_5 comme résidu commun dans S par $P \overset{*}{\to} S$ et $Q \overset{*}{\to} S$.

Mais il n'existe pas d'expression T telle que $M \xrightarrow{*} T$, $T \xrightarrow{*} N$ et $T \xrightarrow{*} P$, qui contient un radical dont R_1 et R_2 soient des résidus dans N et P. Remarquons en outre que les réductions $M \xrightarrow{*} N \to S$ et $M \to Q \to S$ sont équivalentes ; de même pour $M \xrightarrow{*} P \to S$ et $M \to Q \to S$.

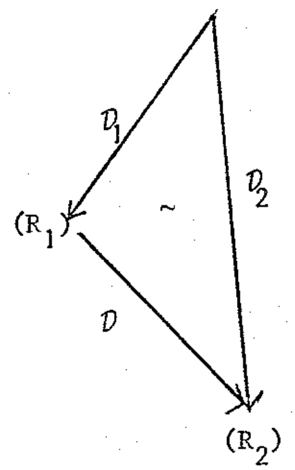
<u>4.2.1. Notation</u> : Par la suite, nous utiliserons des paires dont les éléments sont un radical et une réduction que nous écrirons $(R,\mathcal{D})$ et où R sera toujours un radical de l'expression d'arrivée de $\mathcal{D}$, c'est à dire de N si $\mathcal{D} : M \xrightarrow{*} N$.

<u>4.2.2. Définition</u> : Nous dirons que $(R_2,\mathcal{D}_2)$ est une *<u>duplication</u>* de $(R_1,\mathcal{D}_1)$ et nous écrirons $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$ ssi il existe $\mathcal{D}$ tel que $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}_2$ et $R_2 \in R_1/\mathcal{D}$. La notion de *<u>radicaux de même famille</u>* est définie par fermeture symétrique et transitive de la notion précédente. Formellement, nous écrirons $(R_1,\mathcal{D}_1)\sim(R_2,\mathcal{D}_2)$ si

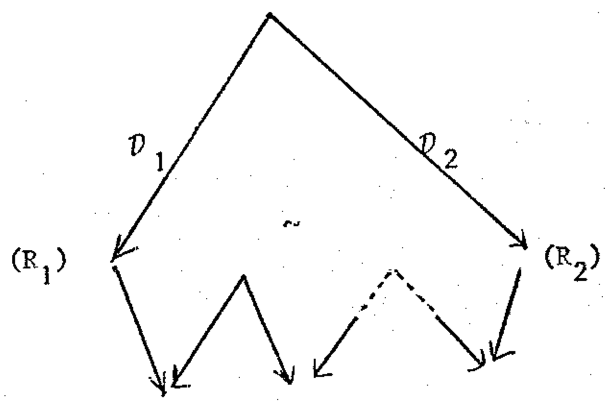
1) $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$ ou $(R_2,\mathcal{D}_2)\leq(R_1,\mathcal{D}_1)$

2) il existe $(R_3,\mathcal{D}_3)$ tel que $(R_1,\mathcal{D}_1)\sim(R_3,\mathcal{D}_3)$ et $(R_3,\mathcal{D}_3)\sim(R_2,\mathcal{D}_2)$.

Remarquons d'abord que le deuxième cas de la définition précédente est nécessaire pour avoir une relation transitive. En effet, en reprenant l'exemple précédent, R_1 et R_3 ont un résidu R_4 en commun dans S et R_3 et R_2 ont un résidu R_5 en commun dans S ; mais R_1 et R_2 n'ont jamais un résidu en commun dans T tel que $N \xrightarrow{*} T$ et $P \xrightarrow{*} T$. Graphiquement, les deux définitions précédentes donnent :



R_2 résidu de R_1 par $\mathcal{D}$ pour $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$



R_1 et R_2 sont reliés par une "chaine" de résidus pour $(R_1,\mathcal{D}_1)\sim(R_2,\mathcal{D}_2)$

4.2.3. Proposition : On a $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$ ssi $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$ et $R_2\in R_1/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$.

Démonstration : D'abord si $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$ et $R_2\in R_1/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ on a $(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2) = 0$ et comme $(\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1))\sim(\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2))$ par la proposition 2.2.6, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}_2$ si on pose $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$. Or $R_2\in R_1/\mathcal{D}$ et donc $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$. Supposons à présent $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$. Il existe donc $\mathcal{D}$ tel que $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}_2$. Par 2.2.7, on a donc $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2$. D'où à nouveau $(\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1))\sim\mathcal{D}_2$, c'est à dire $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim(\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1))$. Donc $\mathcal{D}\sim(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ par 2.2.8. Or on a par hypothèse $R_2\in R_1/\mathcal{D}$ et comme $R_1/\mathcal{D} = R_1/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ par 4.1.2, on a également $R_2\in R_1/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$. □

4.2.4. Proposition : La relation de duplication est un préordre.

Démonstration : immédiate. On a bien sûr $(R,\mathcal{D})\leq(R,\mathcal{D})$. Par ailleurs si $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$ et $(R_2,\mathcal{D}_2)\leq(R_3,\mathcal{D}_3)$ on sait qu'il existe $\mathcal{D}',\mathcal{D}''$ tels que $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}')\sim\mathcal{D}_2$ et $(\mathcal{D}_2;\mathcal{D}'')\sim\mathcal{D}_3$ et $R_2\in R_1/\mathcal{D}'$, $R_3\in R_2/\mathcal{D}''$. On a donc $R_3\in R_1/(\mathcal{D}';\mathcal{D}'')$. De plus $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}';\mathcal{D}'')\sim(\mathcal{D}_2;\mathcal{D}'')\sim\mathcal{D}_3$ par 2.2.4. □

Remarquons que si $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)\leq(R_1,\mathcal{D}_1)$, on a $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}_2\leq\mathcal{D}_1$ par 4.2.3, c'est à dire $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$, et $R_2\in R_1/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ et $R_1\in R_2/(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$, c'est à dire $R_1 = R_2$ puisque $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$ implique $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = 0$.

4.2.5. Proposition : Les relations de duplication et de radicaux de même famille sont compatibles avec l'équivalence des réductions. Formellement, si $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}_2\sim\mathcal{D}'_2$, on a $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$ ssi $(R_1,\mathcal{D}'_1)\leq(R_2,\mathcal{D}'_2)$ et $(R_1,\mathcal{D}_1)\sim(R_2,\mathcal{D}_2)$ ssi $(R_1,\mathcal{D}'_1)\sim(R_2,\mathcal{D}'_2)$.

Démonstration : immédiate. En effet, montrons par exemple que $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{D}_2\sim\mathcal{D}'_2$ et $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$ impliquent $(R_1,\mathcal{D}'_1)\leq(R_2,\mathcal{D}'_2)$. Il existe donc $\mathcal{D}$ tel que $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}_2$ et $R_2\in R_1/\mathcal{D}$. Or, par 2.2.4, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D})\sim(\mathcal{D}'_1;\mathcal{D})$. Donc $(\mathcal{D}'_1;\mathcal{D})\sim\mathcal{D}'_2$. □

4.2.6. Proposition : Si $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$, alors pour tout $\mathcal{D}$ tel que $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}\leq\mathcal{D}_2$, il existe un R unique tel que $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R,\mathcal{D})\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$.

Démonstration : Comme $\mathcal{D}_1\leq\mathcal{D}\leq\mathcal{D}_2$, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_3)\sim\mathcal{D}$ et $(\mathcal{D};\mathcal{D}_4)\sim\mathcal{D}_2$ si $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}/\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_2/\mathcal{D}$. Or par 2.2.4, on a $(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4)\sim\mathcal{D}_2$. Donc comme $(\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1))\sim\mathcal{D}_2$, on a $(\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4)\sim(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ par 2.2.8. Or $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$ indique que $R_2\in R_1/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$. Et par 4.1.2, on a $R_1/(\mathcal{D}_3;\mathcal{D}_4) = R_1/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$. Or ce dernier ensemble n'est pas vide puisqu'il contient R_2. On a donc $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R,\mathcal{D})$ et $(R,\mathcal{D})\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$. Or par 4.2.3 et 4.1.3, R est unique . □

<u>4.2.7. Corollaire</u> : Il existe $(R_3,\mathcal{D}_3)$ tel que $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R_3,\mathcal{D}_3)$ et $(R_2,\mathcal{D}_2)\leq(R_3,\mathcal{D}_3)$ ssi il existe R tel que $(R_1,\mathcal{D}_1)\leq(R,\mathcal{D})$ et $(R_2,\mathcal{D}_2)\leq(R,\mathcal{D})$ où $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$.

<u>4.3. Familles de radicaux dans le λ-calcul étiqueté</u> :

Nous reprenons les définitions du paragraphe précédent en appliquant le théorème de correspondance de 2.5.4.

<u>4.3.1. Notation</u> : Nous écrivons (R,U) pour signaler que R est un radical de l'expression étiquetée U.

<u>4.3.2. Proposition</u> : La notion de résidu est cohérente dans le λ-calcul étiqueté. Formellement, si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions étiquetées de la forme $U \overset{*}{\rightarrow} V$, alors on a $R/\mathcal{D}_1 = R/\mathcal{D}_2$ pour tout radical R de U.

<u>Démonstration</u> : immédiate par 2.5.4 et 4.1.2. □

<u>4.3.3. Définition</u> (✱) : Si $U,V\in\Lambda_e$, posons

$(R,U)\leq(S,V)$ ssi $\exists\mathcal{D}$ tel que $\mathcal{D} : U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $S\in R/\mathcal{D}$

et

$(R,U)\sim(S,V)$ ssi $(R,U)\leq(S,V)$ ou $(S,V)\leq(R,U)$ ou $\exists(T,W)$ tel que $(R,U)\sim(T,W)\sim(S,V)$.

<u>4.3.4. Proposition</u> : Si $V,W\in E(U,P)$ et si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux réductions étiquetées de la forme $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $U \overset{*}{\rightarrow} W$, alors on a $(R,V)\leq(S,W)$ ssi $(R,\mathcal{D})\leq(S,\mathcal{D}')$ et $(R,V)\underset{U}{\sim}(S,W)$ ssi $(R,\mathcal{D})\sim(S,\mathcal{D}')$.

<u>Démonstration</u> : immédiate par 2.5.4 et 4.2.5. □

<u>4.3.5. Proposition</u> : Si $(R,U)\sim(S,V)$, alors degré(R) = degré(S).

<u>Démonstration</u> : immédiate par 1.8.2 puisque les résidus conservent le degré dans le calcul étiqueté. □

(✱) Voir page suivante.

<u>Erratum</u>: (Définition 4.3.3)

1)Les deux relations $\leq$ et $\sim$ sont ambigues dans le λ-calcul étiqueté,car elles peuvent dépendre du prédicat $\mathcal{P}$.Une manière plus précise serait de définir les relations $\leq_{\mathcal{P}}$ et $\sim_{\mathcal{P}}$ de la façon suivante.

Si $V \in \mathcal{E}(U,\mathcal{P})$ (voir 3.1),posons

$(R,U) \leq_{\mathcal{P}} (S,V)$ ssi $\exists \mathcal{D}$ tel que $\mathcal{D}:U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $S \in R/\mathcal{D}$

$(R,U) \sim_{\mathcal{P}} (S,V)$ ssi $(R,U) \leq_{\mathcal{P}} (S,V)$ ou $(S,V) \leq_{\mathcal{P}} (R,U)$ ou $\exists (T,W)$ tel que $(R,U) \sim_{\mathcal{P}} (T,W) \sim_{\mathcal{P}} (S,V)$

Remarquons que dans la définition de $\leq_{\mathcal{P}}$,il n'y a pas besoin de signaler que $\mathcal{D}$ est autorisée par $\mathcal{P}$,car par le théorème de standardisation (puisque $V \in \mathcal{E}(U,\mathcal{P})$) la réduction $\mathcal{D}_{st}:U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V$ est autorisée par $\mathcal{P}$ et,par cohérence des résidus, on a $S \in R/\mathcal{D}_{st}$.

Pour supprimer ce problème dû à $\mathcal{P}$,il n'y a qu'à considérer $\leq$ et $\sim$ comme des abréviations de $\leq_{\mathcal{V}}$ et $\sim_{\mathcal{V}}$ où $\mathcal{V}(\alpha)$ est vrai pour tout α.

2)Une imprécision plus grave existe dans la définition de $\sim$.En effet,on est surtout intéressé par la relation $\underset{U}{\sim}$ suivante.

Si $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $U \overset{*}{\rightarrow} W$,alors

$(R,V) \underset{U}{\sim} (S,W)$ ssi $(R,V) \leq (S,W)$ ou $(S,W) \leq (R,V)$ ou $\exists (T,X)$ tel que $U \overset{*}{\rightarrow} X$ et $(R,V) \underset{U}{\sim} (T,X) \underset{U}{\sim} (S,W)$.

Nous restreignons notre attention aux expressions dérivables d'une même expression et on pourrait même combiner les deux remarques précédentes. Quand le contexte indiquera clairement l'expression U qui nous intéresse,on écrira $\sim$ à la place de $\underset{U}{\sim}$.

3)La difficulté précédente se produira aussi en III.1.4.1 où la définition de famille de sous-contextes est considérée.

Donc, dans le λ-calcul étiqueté, les résidus sont cohérents (en fait ce sont les résidus de réductions qui sont cohérents, voir 2.2.5) et les notions de duplication et de famille correspondent exactement à celles de résidu et de fermeture symétrique et transitive de la relation résidu. Tout cela fonctionne car le calcul étiqueté ne contient plus "d'accidents syntaxiques" en vertu de 2.5.4. Dans le chapitre III, nous allons montrer la réciproque de 4.3.5 dans le cas où $U,V \in \mathcal{E}(W,P)$ et $\mathrm{INIT}(W)$ est vrai (voir 1.8). Cela nous donnera une caractérisation du λ-calcul étiqueté en termes de familles de radicaux.

4.4. Développements finis généralisés :

4.4.1. Définition : Soit $\mathcal{D}$ la réduction $M = M_0 \xrightarrow{F_1} M_1 \xrightarrow{F_2} M_2 \cdots \xrightarrow{F_n} M_n = N$. Nous dirons que la *réduction $\mathcal{D}'$ est relative à $\mathcal{D}$* ssi $\mathcal{D}'$ est de la forme $M' = P_0 \xrightarrow{C_1} P_1 \xrightarrow{C_1} P_2 \cdots \xrightarrow{C_m} P_m \xrightarrow{C_{m+1}} \cdots$

où $\forall i\ \forall S_i \in C_i\ \ \exists R_j \in F_j$ tel que $(R_j,\mathcal{D}_{j-1}) \sim (S_j,\mathcal{D}'_{j-1})$ et $1 \leq j \leq n$ où $\mathcal{D}_j$ et $\mathcal{D}'_j$ représentent les j premières étapes (parallèles) de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Une réduction relative à une réduction $\mathcal{D}$ donnée consiste donc en la contraction de radicaux de même famille. Remarquons que des radicaux créés peuvent intervenir, c'est à dire des radicaux n'existant pas dans M. Comme pour les réductions relatives à un ensemble de radicaux (voir 1.8), nous avons la notion de réduction relative complète.

4.4.2. Définition : Une réduction $\mathcal{D}'$: $M \xrightarrow{*} N$ est une réduction complète relative à $\mathcal{D}$ s'il n'existe plus dans N de radicaux de même famille que ceux contractés dans $\mathcal{D}$.

4.4.3. Proposition : On a $(R,0) \sim (S,\mathcal{D})$ ssi $S \in R/\mathcal{D}$

Démonstration : Montrons en fait que si $(R,0) \leq (R_1,\mathcal{D}_1)$ et si $(R_1,\mathcal{D}_1) \sim (R_2,\mathcal{D}_2)$, alors $(R,0) \leq (R_2,\mathcal{D}_2)$; ce qui est suffisant par 4.2.3. Raisonnons par récurrence sur la relation $(R_1,\mathcal{D}_1) \sim (R_2,\mathcal{D}_2)$. Si $(R_1,\mathcal{D}_1) \leq (R_2,\mathcal{D}_2)$, alors $(R,0) \leq (R_2,\mathcal{D}_2)$. Si $(R_2,\mathcal{D}_2) \leq (R_1,\mathcal{D}_1)$, alors on sait qu'il existe un R'_2 tel que $(R,0) \leq (R'_2,\mathcal{D}_2) \leq (R_1,\mathcal{D}_1)$ par 4.2.6. Comme R'_2 est unique, on a $R_2 = R'_2$.

Donc $(R,\mathcal{O})\leq(R_2,\mathcal{D}_2)$. Le cas où $(R_1,\mathcal{D}_1)\sim(R_3,\mathcal{D}_3)\sim(R_2,\mathcal{D}_2)$ se traite par récurrence. □

4.4.4. Corollaire : Soit F un ensemble de radicaux de M et soit $\mathcal{D}$ la réduction $M \overset{F}{\to} N$, alors toute réduction relative à $\mathcal{D}$ au sens 4.4.1 est relative à F au sens de 1.8 et réciproquement.

Les deux notions de développements finis coïncident donc sur les radicaux qui figurent dans l'expression initiale. Et nous avons donc généralisé la notion de développement fini de 1.8. De plus, cette généralisation ne provient que de la prise en compte des radicaux créés. On peut donc s'attendre à la généralisation du théorème 1.8.5. C'est ce que nous faisons en utilisant à nouveau le calcul étiqueté et un prédicat borné.

4.4.5. Lemme : Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont relatives à $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$ sont aussi relatives à $\mathcal{D}$.

Démonstration : immédiate. Soit $\mathcal{D}_1^i$ et $\mathcal{D}_i$ les i premières étapes de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_i$. On a déjà $\mathcal{D}_2$ relative à $\mathcal{D}$. Donc le seul problème pour $\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$ est la partie postérieure à $\mathcal{D}_2$. Appelons F_i, C_i et C_i' les ensembles de radicaux contractés à chaque étape de $\mathcal{D},\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$. Pour tout $P_i'\in C_i'$, on a :
$(R_i',(\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1^{i-1}/\mathcal{D}_2)))\sim(R_i',(\mathcal{D}_1^{i-1};(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1^{i-1})))$ (par 4.2.5 et 2.2.6)

$$\geq(R_i,\mathcal{D}_1^{i-1})\sim(S_j,\mathcal{D}_j)$$

pour $R_i\in C_i$ et $S_j\in F_j$, puisque $\mathcal{D}_1$ est relative à $\mathcal{D}$. □

4.4.6. Théorème : Soit $\mathcal{D}$ une réduction donnée issue de M.

1) Toutes les réductions relatives à $\mathcal{D}$ se terminent sur une même expression.

2) Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions complètes relatives à $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{D}_1\sim\mathcal{D}_2$, c'est à dire $\mathcal{D}'/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'/\mathcal{D}_2$ pour toute réduction $\mathcal{D}'$ issue de M.

Démonstration : D'abord toutes les réductions relatives à $\mathcal{D}$ se terminent. En effet, soit U étiqueté correspondant à M. Donc $\tau^{-1}(U) = M$. Considérons la réduction étiquetée $\mathcal{D}_e$ isomorphe à $\mathcal{D}$ et issue de U :

$$U = U_0 \overset{F_1}{\to} U_1 \overset{F_2}{\to} \cdots \overset{F_n}{\to} U_n$$

$\mathcal{P}(\alpha)$ = vrai ssi $\exists i$ tel que $1 \le i \le n$ et α = degré(R_i) et $R_i \in \mathcal{F}_i$

Ce prédicat est borné supérieurement et donc l'ensemble $\mathcal{R}(U,\mathcal{P})$ des réductions qu'il autorise est fortement normalisable. Or les réductions relatives à $\mathcal{D}$ sont comprises dans cet ensemble par 4.3.5 et se terminent donc toutes. Par ailleurs, si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions complètes relatives à $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$ qui sont aussi relatives à $\mathcal{D}$ grâce au lemme précédent. Donc $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \mathcal{O}$ et $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Cela implique $\mathcal{D}'/\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'/\mathcal{D}_2$ pour tout $\mathcal{D}'$ grâce à la remarque finale de 2.2. □

En fait, on aurait pu définir de la même manière des réductions relatives à plusieurs réductions issues d'une même expression et le théorème serait toujours valable. Ce qui importe dans ce théorème est que le nombre de familles de radicaux contractables est fini. Une autre manière de le voir est la combinaison de deux phénomènes : 1) on ne peut contracter indéfiniment des résidus d'un ensemble donné de radicaux (voir 1.8.5), 2) le niveau de création de radicaux est borné (voir 1.8.4).

Remarquons en outre que $\mathcal{D}$ est relative à $\mathcal{D}$ et, donc, si $\mathcal{D}'$ est complète relative à $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} \le \mathcal{D}'$.

4.5. Discussion :

Nous avons deux ensembles de réductions qui ont des propriétés analogues : les réductions étiquetées autorisées par un prédicat $\mathcal{P}$ donné, et les réductions relatives à une réduction donnée.
En effet, ces ensembles ont les propriétés Church-Rosser, de normalisation forte et de cohérence des résidus. En fait, nous venons de voir que les réductions relatives peuvent être vues comme sous-ensemble de l'ensemble des réductions autorisées par un certain prédicat $\mathcal{P}$ borné. Mais la réciproque est-elle vraie ? Autrement dit, le degré des radicaux du λ-calcul étiqueté correspond-t-il à la famille de ce radical ?

Nous allons voir que ces deux notions coïncident dans les paragraphes suivants. Pour cela, nous devrons montrer que deux radicaux sont de même famille ssi ils sont "créés de la même manière". Et nous montrerons que notre mécanisme d'étiquettes correspond exactement à conserver la manière dont a été créé tout radical. A toute paire $(R,\mathcal{D})$, nous associerons une paire $(R_0,\mathcal{D}_0)$ notée encore $(R,\mathcal{D})_0$ qui consistera à isoler dans $\mathcal{D}$ les pas qui servent à "créer" R. Et il faudra définir les réductions créatrices d'un certain radical. Cette notion n'est pas si simple. Considérons, par exemple, l'expression $M=(\lambda x\cdot(\lambda y\cdot yB)(\lambda z\cdot A)$. On a $M \overset{*}{\rightarrow} (\lambda z\cdot A)B$. Le radical $(\lambda z\cdot A)B$ n'existait pas dans M et est donc un radical créé. Mais chacun des deux radicaux de M participe à la création de ce radical. Si on contracte un seul des deux radicaux de M, on n'obtient pas le radical $(\lambda z\cdot A)B$, mais un "sous-contexte" intéressant qui permet d'obtenir le radical $(\lambda z\cdot A)B$ à l'étape suivante. C'est pourquoi, nous allons nous intéresser aux "sous-contextes" d'une expression qui nous permettront de définir facilement la notion de réduction créatrice ou "génératrice". Les sous-contextes seront plus faciles à traiter dans le cadre du λ-calcul étiqueté ; en effet, il y aurait des ambiguités si nous restions dans le λ-calcul sans étiquettes. Nous étudions donc les sous-contextes étiquetés.

CHAPITRE III

FAMILLES DE SOUS-CONTEXTES*

Ce chapitre est un peu technique et n'est pas nécessaire pour le chapitre suivant, mais il est fondamental pour le chapitre V. Nous introduisons la notion de familles de sous-contextes qui généralise la notion de familles de radicaux. Et nous montrons que cette notion s'exprime bien dans le λ-calcul étiqueté. Nous obtenons ainsi quelques résultats supplémentaires sur les familles de radicaux.

1) SOUS-CONTEXTES ETIQUETES; RESIDUS; SOUS-CONTEXTES DE MEME FAMILLE; SOUS-CONTEXTES CREES

Pour parler des sous-contextes (déjà introduits au chapitre I), nous n'échapperons pas à deux difficultés techniques : 1) nous resterons dans le λ-calcul étiqueté car sinon le sous-contexte vide $[\ ]$ nous poserait beaucoup de problèmes et nous aurons besoin de ce sous-contexte dans certaines récurrences, 2) nous devrons parler d'occurrences que nous désignerons par des coordonnées analogues à celles décrites au chapitre I.

1.1. Sous-contextes étiquetés; définitions :

1.1.1. Définition : L'ensemble $\mathcal{C}_e$ des *contextes étiquetés* est le plus petit sous-ensemble contenant :

$$\left\{\begin{array}{l} [\ ]^{\alpha} \\ x^{\alpha} \\ (A[\ ]B[\ ])^{\alpha} \\ (\lambda x\cdot A[\ ])^{\alpha} \end{array}\right. \qquad \text{si } \alpha \in E,\ x \text{ variable et } A[\ ],\ B[\ ] \in \mathcal{C}_e$$

*Par suite d'une omission (involontaire), il faut supposer dans tout le chapitre $P(\alpha)$ vrai pour tout α. (En fait, tout demeure exact avec P quelconque)

Cette définition est analogue à celle du chapitre I et un contexte est donc une expression étiquetée où plusieurs sous-expressions peuvent manquer. Un trou est chacun des emplacements où une sous-expression manque. Nous avons donc des contextes à n trous où $n \geq 0$. Remarquons que chaque trou a une étiquette. Un certain nombre d'opérations définies sur les expressions sont immédiatement étendues aux contextes, par exemple $\tau(A[\ ])$, $\alpha\overline{\beta}\cdot A[\ ]$ et $\alpha\underline{\beta}\cdot A[\ ]$ si $\alpha,\beta \in E$, $A[\ ][x\backslash B]$ etc ...

Pour des raisons techniques, nous considérons aussi l'ensemble $\mathcal{C}'_e$ des contextes $A[\ ]$ tels que $\alpha\cdot A[\ ] \in \mathcal{C}_e$ où $\alpha \in E$.

Nous écrivons $A[;]$, $A[,;]$, $A[,,;]$ etc ... pour préciser un, deux, trois trous etc ... dans le contexte $A[\ ]$. Et si $A[\ ] \in \mathcal{C}_e$ et si $B_i[\ ] \in \mathcal{C}'_e$ pour $1 \leq i \leq n$, nous notons $A[B_1[\ ], B_2[\ ], \ldots B_n[\ ]\ ;\ ]$ pour le contexte obtenu en introduisant $B_1[\ ]$, $B_2[\ ]$, ... $B_n[\ ]$ dans chacun des n trous de $A[\ ]$ précisés en écrivant $A[,, \ldots ;\ ]$.

<u>1.1.2. Définition</u> : Un <u>*contexte*</u> $A[\ ]$ est un *préfixe du contexte* $B[\ ]$ si $B[\ ] = A[B_1[\ ], B_2[\ ], \ldots B_n[\ ];\ ]$ pour certains $B_1[\ ]$, $B_2[\ ]$, ... $B_n[\ ]$ de $\mathcal{C}'_e$ où $n \geq 0$ et $A[\ ]$, $B[\ ] \in \mathcal{C}_e$.

<u>1.1.3. Définition</u> : Tout préfixe d'une sous-expression d'une expression étiquetée U sera un <u>*sous-contexte*</u> de U.

<u>1.1.4. Notation</u> : Tout sous-contexte $A[\ ]$ d'une expression U aura des <u>*coordonnées*</u> $(u, A[\ ], U)$ dont la signification est la suivante :

1) si $A[\ ]$ est un préfixe de U, alors $u = \varepsilon$ (mot vide),

2) si $U = \alpha\overline{\beta}\cdot U_1$ où $\alpha,\beta \in E$ et si $A[\ ]$ est un sous-contexte de U_1 de coordonnées $(u_1, A[\ ], U_1)$, alors $u = \alpha\overline{\beta}u_1$,

3) si $U = \alpha\underline{\beta}\cdot U_1$ où $\alpha,\beta \in E$ et si $A[\ ]$ est un sous-contexte de U_1 de coordonnées $(u_1, A[\ ], U_1)$, alors $u = \alpha\underline{\beta}u_1$,

4) si $U = (\lambda x \cdot U_1)^{\alpha}$ et si $A[\ ]$ est un sous-contexte de U_1 de coordonnées $(u_1, A[\ ], U_1)$ alors $u = \alpha[\lambda x]\ u_1$,

5) si $U = (U_1 U_2)^{\alpha}$ et si $A[\ ]$est un sous-contexte de U_i de coordonnées $(u_i, A[\ ], U_i)$ où $1 \leqslant i \leqslant 2$, alors $u = \alpha[i]u_i$.

Nous utilisons la lettre ξ pour désigner des coordonnées d'un sous-contexte et, si $\xi = (u, A[\ ], U)$, nous *posons* $\xi \subset U$ pour signaler que le sous-contexte de coordonnées ξ est un sous-contexte de U.

La première composante des coordonnées d'un sous-contexte est donc le chemin issu de la racine de l'arbre représentant l'expression et aboutissant à ce sous-contexte. Cette composante contient aussi les étiquettes de ce chemin (à la différence du chapitre I). Remarquons également que la notion de sous-contexte et, par conséquent, de sous-expression est prise au sens large, car si $\alpha\overline{\beta} \cdot A[\ ]$ ou $\alpha\underline{\beta} \cdot A[\ ]$ est un sous-contexte de U, on a aussi $A[\ ]$ comme sous-contexte de U. Et cela lèvera toute ambiguité pour les contextes de la forme $[\ ]^{\alpha}$.

1.1.5. Notation : Les lettres de gauche et de droite d'une étiquette α de E seront notées $G(\alpha)$ et $D(\alpha)$. Formellement, on a :

$$\begin{cases} G(a) = D(a) = a & \text{si } a \in E_o \\ G(\alpha\ \overline{\beta}\ \gamma) = G(\alpha\ \underline{\beta}\ \gamma) = G(\alpha) & \text{si } \alpha,\ \beta,\ \gamma \in E \\ D(\alpha\ \overline{\beta}\ \gamma) = D(\alpha\ \underline{\beta}\ \gamma) = D(\gamma) & \text{si } \alpha,\ \beta,\ \gamma \in E \end{cases}$$

1.1.6. Notation : A tout sous-contexte de coordonnées $(u, A[\ ], U)$, nous associons le contexte $\{u,U\}[A[\ ];]$ préfixe de U défini par :

1) $\{u,U\}[A[\ ];] = A[\ ]$ si $u = \varepsilon$ (chemin vide)

2) $\{u,U\}[A[\ ];] = \alpha\overline{\beta} \cdot A[\ ]$ si $u = \alpha\overline{\beta}$

3) $\{u,U\}[A[\ ];] = \alpha\underline{\beta} \cdot A[\ ]$ si $u = \alpha\underline{\beta}$

4) $\{u,U\}\,[A[\ ];] = (\lambda x\cdot\{u_1,U_1\}\,A[\ ];])^{\alpha}$ si $U = (\lambda x\cdot U_1)^{\alpha}$, $u = \alpha[\lambda x]u_1$

5) $\{u,U\}\,[A[\ ];] = (\{u_1,U_1\}[A[\ ];]\,[\ ]^{a})^{\alpha}$si $U = (U_1U_2)^{\alpha}$, $u = \alpha[1]u_1$ et $a = G(\tau(U_2))$.

6) $\{u,U\}\,[A[\ ];\ ] = ([\ ]^{a}\,\{u_2,U_2\}[A[\ ];]\ )^{\alpha}$ si $U = (U_1U_2)^{\alpha}$, $u = \alpha[2]u_2$ et $a = G(\tau(U_1))$.

Cette notation compliquée permet simplement de transformer un sous-contexte $A[\ ]$ et son chemin associé u en un seul contexte. Et cette opération dépend de U dans le dernier cas de sa définition car, pour rester cohérent avec la définition des contextes étiquetés, on doit introduire une étiquette à chaque application contenue dans u.

1.1.7. Définition : Le sous-contexte de coordonnées $\xi = (u,A[\ ],U)$ est *contenu* dans le sous-contexte de coordonnées $\xi' = (v,B[\ ],U)$ si $u = vu_1$ et si $\{u,U\}[A[\ ];]$ est un préfixe de $\{v,U\}\,[B[\ ];]$. Deux sous-contextes sont *disjoints* s'ils ne contiennent pas de sous-contexte commun.

Si ξ est contenu dans ξ', nous *écrivons* $\xi \subset \xi'$ sans ambiguité avec $\xi \subset U$ de 1.1.4, que l'on peut donc voir comme une abréviation de $\xi \subset (\varepsilon, U, U)$. Remarquons en outre que deux sous-contextes peuvent être disjoints sans être dans deux sous-expressions disjointes. Dans un tel cas, si $(u,A[\ ]\ U)$ et $(v,B[\ ], U)$ sont les coordonnées de ces deux sous-contextes et si $u = vu_1$ nous dirons que le sous-contexte $A[\ ]$ est *sous* $B[\ ]$.

1.1.8. Définition : *L'union* de deux contextes $A[\ ]$ et $B[\ ]$, notée $A[\ ] \cup B[\ ]$, préfixes d'un même contexte, est définie récursivement par :

$$\begin{cases} A[\ ] \cup A[\ ] = A[\ ] & \text{et} \quad A[\ ] \cup B[\ ] = B[\ ] \cup A[\ ] \\ [\ ]^{\alpha} \cup \alpha\overline{\beta}\cdot A[\ ] = \alpha\overline{\beta}\cdot A & \text{et} \quad [\ ]^{\alpha} \cup \alpha\underline{\beta}\cdot A[\ ] = \alpha\underline{\beta}\cdot A[\ ] \\ (\lambda x\cdot A[\ ])^{\alpha} \cup (\lambda x\cdot B[\ ])^{\alpha} = (\lambda x\cdot A[\ ] \cup B[\ ])^{\alpha} & \\ (A_1[\ ]\ A_2[\ ])^{\alpha} \cup (B_1[\ ]\ B_2[\ ])^{\alpha} = ((A_1[\ ] \cup B_1[\ ])\ (A_2[\ ] \cup B_2[\ ]))^{\alpha} & \end{cases}$$

Cette opération est clairement associative et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i[\ ]$ désignera l'union des n contextes $A_i[\ ]$. Dans le cas n = 0, on posera $\bigcup_{i=1}^{n} A_i[\ ] = O[\ ]$ où $O[\ ]$ est le contexte étiqueté vide tel que $O[\ ] \cup A[\ ] = A[\ ] \cup O[\ ] = A[\ ]$ pour tout contexte $A[\ ]$.

Nous résumons graphiquement les définitions précédentes sous forme d'arbre :

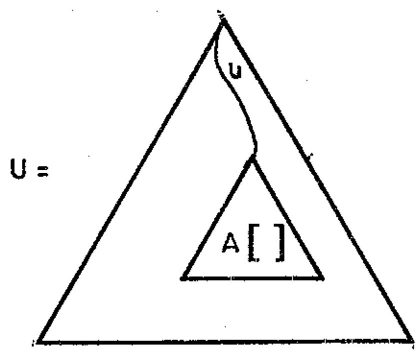


Figure 1
Sous-contexte de coordonnées (u,A[ ],U)

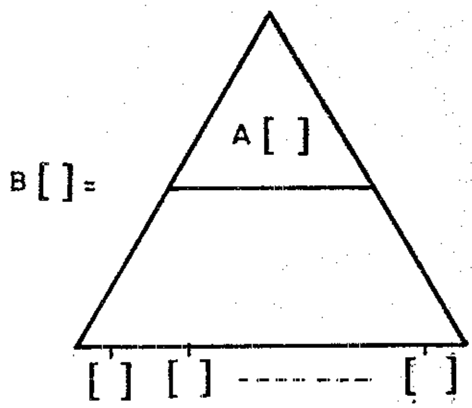


Figure 2
A[ ] préfixe de B[ ]

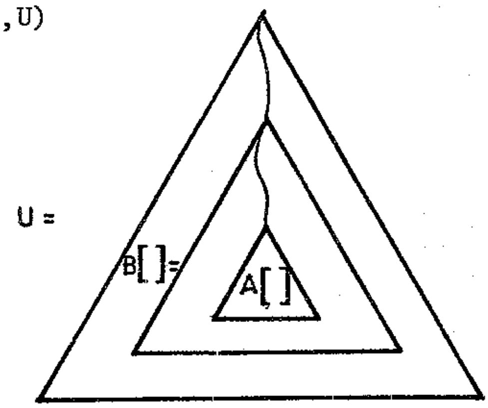
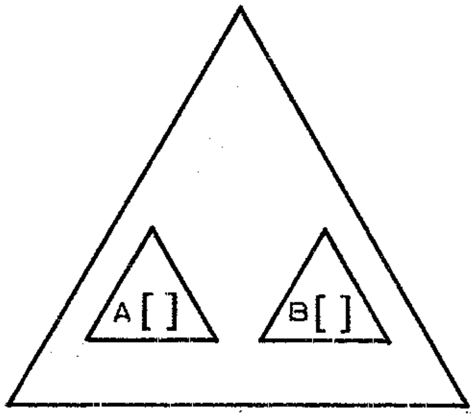
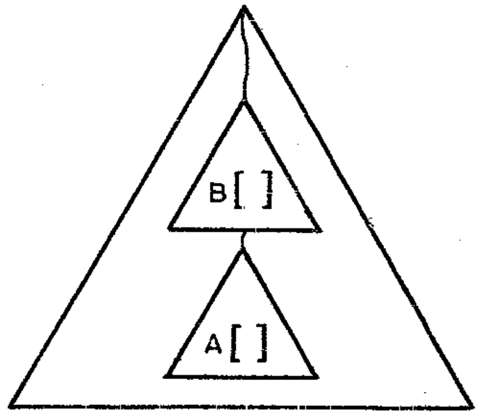


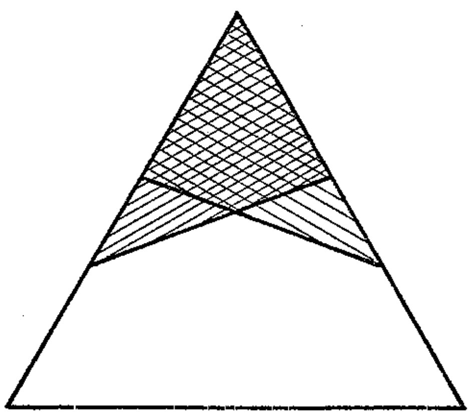
Figure 3
Le sous-contexte B[ ] contient A[ ]



<u>Figure 4</u>
A[ ] et B[ ] sont disjoints



<u>Figure 5</u>
A[ ] et B[ ] sont disjoints
mais A[ ] est sous B[ ]



<u>Figure 6</u>
A[ ] ∪ B[ ] si A[ ] et B[ ] sont hachurés par et

1.2. Sous-contextes résidus; sous-contextes créés

1.2.1. Définition : Si $U \overset{R}{\rightarrow} V$ où le radical contracté $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$ a pour coordonnées (v, R, U), *les résidus* dans V *d'un sous-contexte* $A[\ ]$ de coordonnées $(u, A[\ ], U)$ sont définis par :

1) Si $A[\ ]$ et R sont dans deux sous-expressions disjointes, le sous-contexte $(u, A[\ ], U)$ a pour résidu unique dans V le sous-contexte de coordonnées $(u, A[\ ], V)$. (On est donc dans le cas où $u = w[i]u_1$, $v = w[j]v_1$ et $i,j \in \{1,2\}$ avec $i \neq j$).

2) Si R est sous $A[\ ]$ ou plus exactement $uu_1 = v\beta'$, $\beta' b = \beta$, $b = D(\beta)$ et $(u, A[\ ], U)$, $(v\beta[1][\ ]^{\alpha}, U)$ disjoints, le résidu unique de $A[\ ]$ dans V a pour coordonnées $(u, A[\ ], V)$.

3) Si $A[\ ]$ est contenu dans S, c'est-à-dire $u = v\beta[1]\alpha[\lambda x]\, u_1$ et si $A[\ ]$ ne contient aucune occurrence de la variable libre x de S, alors le résidu unique de $A[\ ]$ dans V a pour coordonnées $(v\beta\bar{\alpha} u_1, A[\ ], V)$.

4) Si $A[\ ]$ est contenu dans T, c'est-à-dire $u = v\beta[2]u_1$, les résidus dans V de $A[\ ]$ sont les sous-contextes de coordonnées $(v\beta\,\bar{\alpha}\, w_i \gamma_i \underline{\alpha} u_1, A[\ ], V)$ où (w_i, x^{γ_i}, S) sont les coordonnées des occurrences de la variable libre x dans S.

Si $U \overset{R}{\rightarrow} V$, tout sous-contexte de U n'a pas forcément un résidu dans V. De même tout sous-contexte de V n'est pas un résidu d'un sous-contexte de U. Graphiquement, on a :

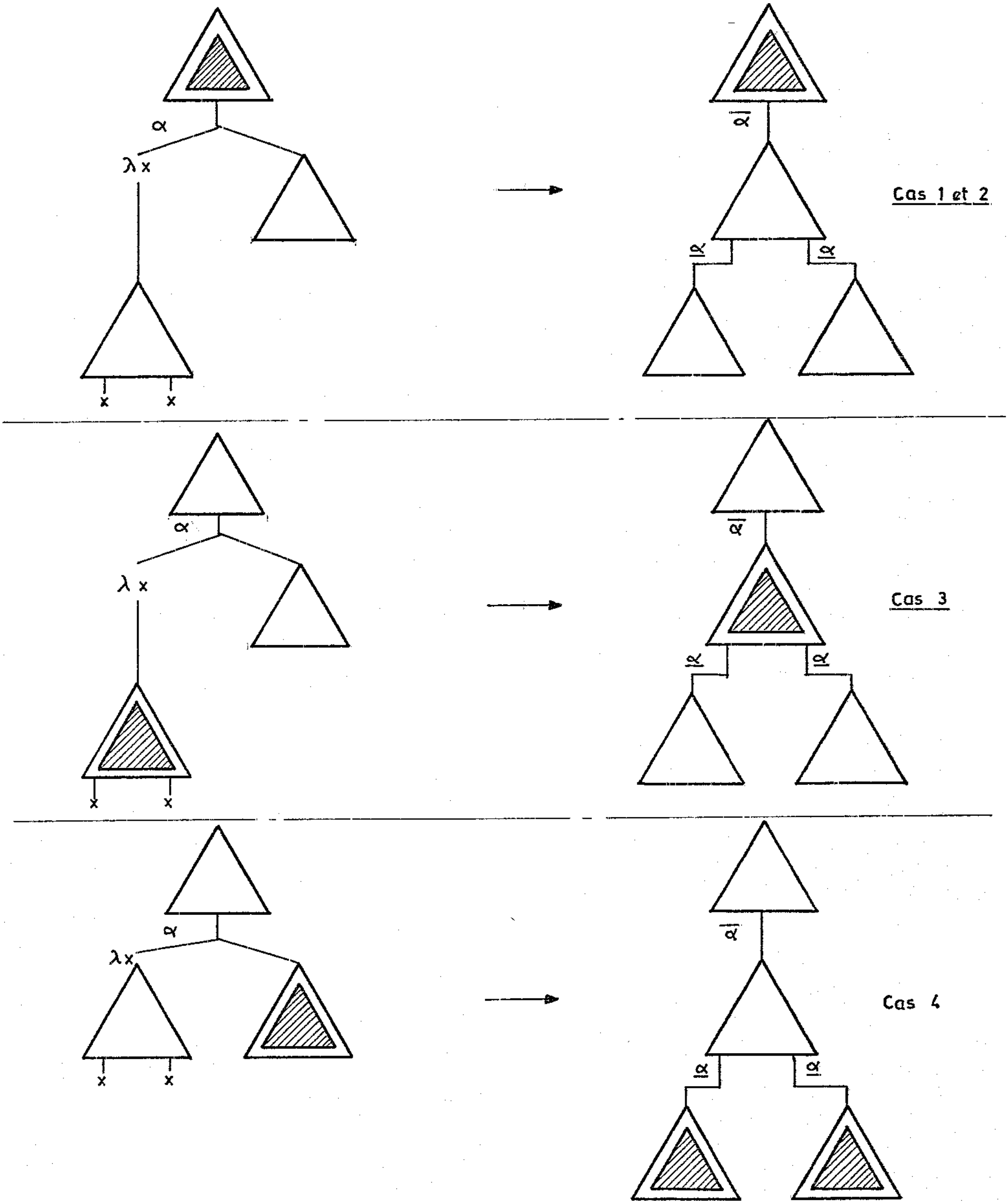


Figure 7

Le sous-contexte A[ ] et ses résidus sont hachurés

1.2.2. Définition : Si $U \overset{*}{\to} V$, les résidus dans V d'un sous-contexte de U sont obtenus par fermeture réflexive et transitive sur la longueur de la réduction $U \overset{*}{\to} V$ à partir de la définition précédente. De plus si $(v, A[\ ], V)$ sont les coordonnées d'un résidu d'un sous-contexte de coordonnées $(u, A[\ ], U)$, nous *noterons* cette relation par $(u, A[\ ], U) \leqslant (v, A[\ ], V)$.

Les radicaux étant des sous-expressions particulières et les sous-expressions des sous-contextes particuliers, on peut se demander si les notions de résidus de radicaux et de résidus de sous-contextes coïncident. La réponse est clairement négative, car un résidu de sous-contexte est toujours syntaxiquement égal au sous-contexte dont il est résidu alors que le résidu d'un radical peut différer de ce dernier. Mais ces deux notions se relient de la manière suivante :

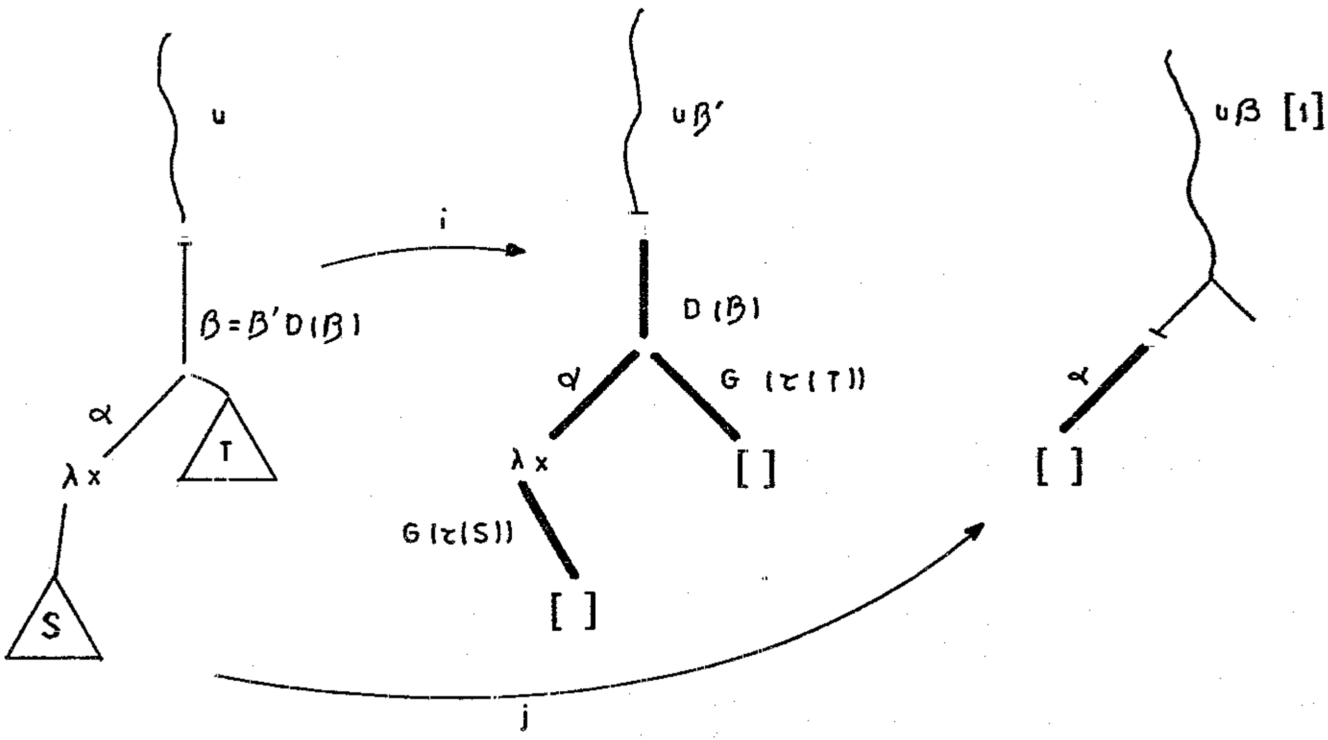
1.2.3. Proposition : Si $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$, soient $i_1(R)$ et $i_2(R)$ les quantités suivantes : $i_1(R) = \beta'$ et $i_2(R) = ((\lambda x \cdot [\ ]^a)^{\alpha} [\ ]^c)^b$ où $a = G(\tau(S))$, $b = D(\beta)$, $\beta = \beta' b$ et $c = G(\tau(T))$. Alors si $U \to V$, le radical de coordonnées (u', R', V) est un résidu du radical de coordonnées (u, R, U) au sens de II.1.8. ssi on a $(u i_1(R), i_2(R), U) \leqslant (u' i_1(R'), i_2(R'), V)$.

Démonstration : Application directe des définitions. □

1.2.4. Proposition : Si $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$, posons $j_1(R) = \beta[1]$ et $j_2(R) = [\ ]^{\alpha}$. Alors si $U \overset{*}{\to} V$ et si R et R' sont deux radicaux de U et V de coordonnées (u, R, U) et (u', R', V), on a R' résidu de R au sens de II.1.8. ssi on a $(u j_1(R), j_2(R), U) \leqslant (u' j_1(R'), j_2(R'), V)$.

Démonstration : évidente en se servant de 1.2.3. □

Graphiquement, les sous-contextes associés précédemment à un radical sont représentés par :



<u>1.2.5. Définition</u> : Si $U \overset{R}{\to} V$, tout *sous-contexte* A[ ] de V qui n'est pas un résidu d'un sous-contexte de U est dit *créé* par la contraction de R dans U. Plus simplement, on dira que A[ ] est créé par R.

<u>1.2.6. Proposition</u> : Si $U \overset{R}{\to} V$ où le radical contracté $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$ a pour coordonnées (v, R, U) et si le sous-contexte de coordonnées (u, A[ ], V) est créé par R, on ne peut avoir que l'un des deux cas suivants :

1) $A[\ ] = B[\bar{\alpha} \cdot C\ [\underline{\alpha} \cdot D_1[\ ],\ \underline{\alpha} \cdot D_2[\ ],\ \ldots\ \underline{\alpha} \cdot D_n[\ ];];]$ où $n \geq 0$ et R est sous B[ ] ou plus exactement $uu_1 = v\beta'$ avec $\beta' b = \beta$ et $b = D(\beta)$ et C[ ] de coordonnées $(v\beta\bar{\alpha}$, C[ ], U).

2) $A[\ ] = C[\underline{\alpha} \cdot D_1[\ ],\ \underline{\alpha} \cdot D_2[\ ],\ \ldots\ \underline{\alpha} \cdot D_n[\ ];\ ]$ où $n \geq 1$ et C[ ] contenu dans S, c'est-à-dire $u = v\beta\bar{\alpha}u_1$.

Dans les deux cas, les sous-contextes B[ ] et C[ ] sont des résidus de sous-contextes de U, ainsi que les sous-contextes de coordonnées $(v\beta\bar{\alpha}w_i\gamma_i\underline{\alpha}$, $D_i[\ ]$, V) qui sont tels que (w_i, x^{γ_i}, S) soient des coordonnées d'occurrences de la variable libre x de S et qui sont des résidus des sous-contextes $(v\beta[2], D_i[\ ], U)$. L'expression U contient donc le sous-contexte de coordonnées $(v\beta[2], \bigcup_{i=1}^{n} D_i[\ ], U)$.

Démonstration : évidente en considérant toutes les positions possibles de A[ ]dans V et en ne retenant que celles où A[ ] est créé par R. □

1.3. Cohérence de la notion de sous-contexte résidu dans le λ-calcul étiqueté

1.3.1. Notation : Nous considérons les normes suivantes sur les étiquettes de E et sur les contextes étiquetés de $\mathcal{C}_e$, que nous notons $\|\alpha\|_1$ et $\|A[\ ]\|_1$ et que nous définissons par :

$$\begin{cases} \|a\|_1 = 0 \quad \text{si } a \in E_o \\ \|\alpha\overline{\beta}\gamma\|_1 = \|\alpha\underline{\beta}\gamma\|_1 = 1 + \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1 \text{ si } \alpha,\beta,\gamma \in E \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \|[\ ]^\alpha\|_1 = \|x^\alpha\|_1 = \|\alpha\|_1 \\ \|(\lambda x \cdot A[\ ])^\alpha\|_1 = \|A[\ ]\|_1 + \|\alpha\|_1 \\ \|(A[\ ]B[\ ])^\alpha\|_1 = \|A[\ ]\|_1 + \|B[\ ]\|_1 + \|\alpha\|_1 \end{cases}$$

où $\alpha \in E$ et A[ ], B[ ]sont dans $\mathcal{C}_e$. Ces deux normes comptent donc simplement le nombre de soulignements et surlignements.

1.3.2. Lemme : Si INIT(U) est vrai (voir II.1.8) et si $U \xrightarrow{*} V$, on a (u, A[ ], U) $\leqslant$ (v, B[ ], V) ssi A[ ] = B[ ] .

Démonstration : identique à celle du lemme II.1.8.5. En effet si (u, A[ ], U) $\leqslant$ (v, B[ ], V), on a par définition A[ ]= B[ ]. Réciproquement, raisonnons par récurrence sur la longueur ℓ de la réduction $U \xrightarrow{*} V$. Le cas $\ell = 0$ est trivial car la condition INIT(U) implique que si A[ ]= B[ ], alors A[ ] et B[ ] sont exactement les mêmes sous-contextes. Si $\ell > 0$, la réduction $U \xrightarrow{*} V$ se décompose en $U \xrightarrow{*} W \xrightarrow{R} V$. Supposons qu'il existe des sous-contextes de coordonnées (u, A[ ], U) et (v, B[ ], V) tels que A[ ] = B[ ] . Comme INIT(U) est vrai, on a $\|A[\ ]\|_1 = \|B[\ ]\|_1 = 0$. Donc le sous-contexte (v, B[ ], V) n'est pas créé par R, car sinon on aurait $\|B[\,]\|_1 > 0$ d'après 1.2.6. Le sous-contexte (v, B[ ], V) est donc résidu d'un sous-contexte (w, B[ ], W) et, par récurrence, A[ ]= B[ ] implique (u, A[ ], U) $\leqslant$ (w, B[ ], W). D'où (u, A[ ], U) $\leqslant$ (v, B[ ], V). □

1.3.3. Théorème : La notion de résidu de sous-contexte est cohérente dans le λ-calcul étiqueté. Précisément, si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions de la forme $U \overset{*}{\to} V$ et si A[ ] est un sous-contexte de U, alors les résidus de A[ ] par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les mêmes.

Démonstration : identique à celles de II.4.1.2 et II.1.8.5. □

1.3.4. Proposition : Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions de la forme $U \overset{*}{\to} V$ et si A[ ] est un sous-contexte de V résidu des sous-contextes de coordonnées (u_1, A[ ], U) et (u_2, A[ ], U) par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, alors $u_1 = u_2$.

Démonstration : identique à celle de II.4.1.4. □

1.4. Sous-contextes de même famille

Nous étendons les définitions de II.4. aux sous-contextes étiquetés.

1.4.1. Définition* : Si U, V $\in \Lambda_e$ et si ξ = (u, A[ ], U) et ξ' = (v, B[ ], V) sont les coordonnées de deux sous-contextes de U et V, posons $\xi \sim \xi'$ ssi $\xi \leqslant \xi'$ ou $\xi' \leqslant \xi$ ou s'il existe ξ'' = (w, C[ ] , W) tel que $\xi \sim \xi'' \sim \xi'$. Nous dirons que les *sous-contextes* de coordonnées ξ et ξ' sont dans une *même famille*.

1.4.2. Proposition : Si ξ = (u, A[ ], U) et ξ' = (v, B[ ], V) et si $\xi \sim \xi'$, alors A[ ]= B[ ].

Démonstration : immédiate par 1.2.1 et 1.2.2. □

1.4.3. Proposition : Si ξ et ξ' sont les coordonnées des sous-contextes associés par 1.2.3 et 1.2.4 aux radicaux (R,U) et (S,V), alors on a $\xi \sim \xi'$ ssi (R,U) $\sim$ (S,V).

Démonstration : par transitivité sur 1.2.3 et 1.2.4. □

* Voir erratum de la page 63 bis pour distinguer $\sim$ et $\underset{U}{\sim}$.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer la réciproque de 1.4.2. quand U, V $\in \mathscr{E}(W,\mathscr{P})$ et INIT(W) est vrai. Ainsi par 1.4.3., nous aurons aussi montré la réciproque de II.4.3.5.

2) REPRESENTANT CANONIQUE D'UNE FAMILLE DE SOUS-CONTEXTES; REDUCTIONS GENERATRICES

2.1. Représentants canoniques et réductions génératrices ; définitions

2.1.1. Définition : Si $U \overset{R}{\rightarrow} V$ où les coordonnées du radical contracté $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$ sont (v,R,U) et si $A[\ ]$ est un sous-contexte de V de coordonnées $(u, A[\ ], V)$ créé par R, le *générateur strict* de $A[\ ]$ dans U a les coordonnées $(u_1, A_1[\ ], U)$ définies par :

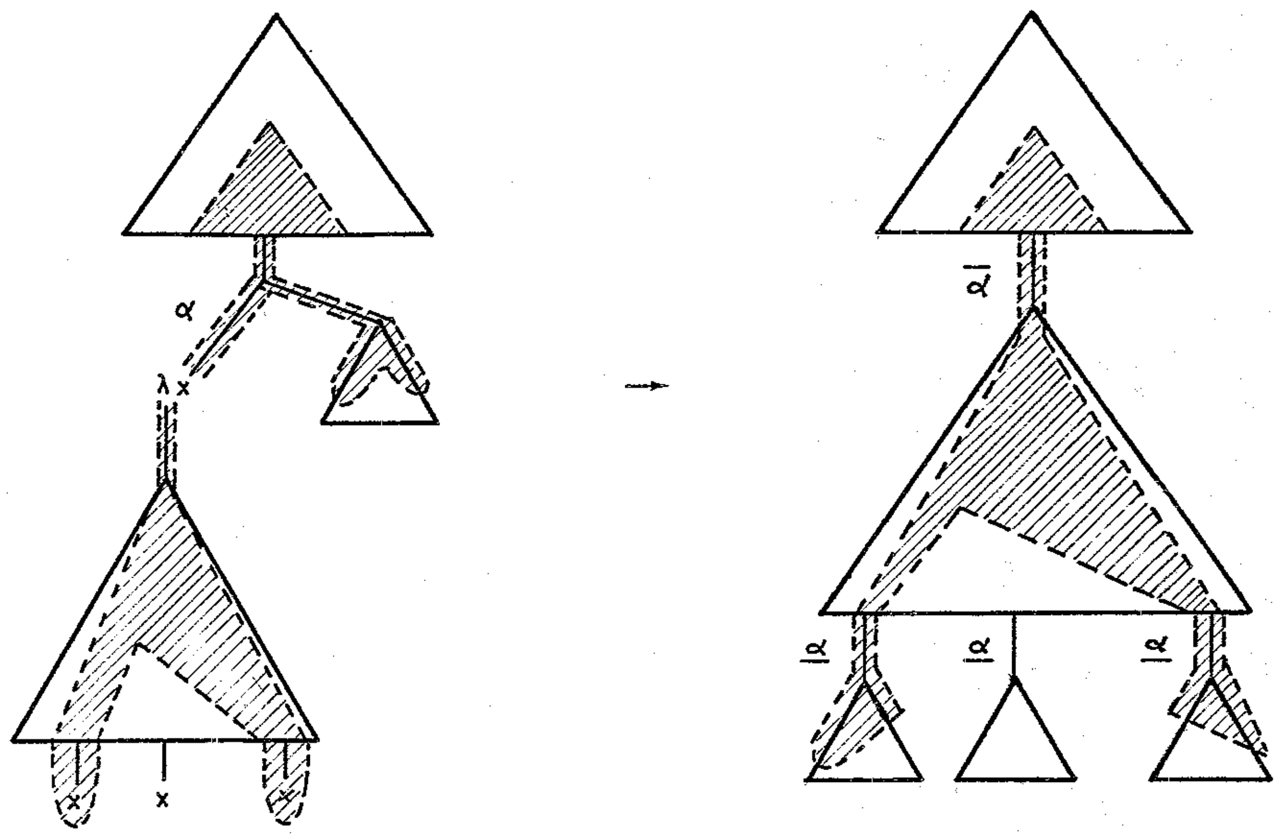
1) $u_1 = u$, $A_1[\ ] = B\,[(\lambda x \cdot C[x,x,\ldots x;])^{\alpha}\ D[\ ];\ ]$ si
$A[\ ] = B[\overline{\alpha} \cdot C\,[\underline{\alpha} \cdot D_1[\ ],\ \underline{\alpha} \cdot D_2[\ ], \ldots \underline{\alpha} \cdot D_n[\ ];\ ];\ ]$ où $n \geqslant 0$ et $C[\ ]$ a pour coordonnées $(v\beta\overline{\alpha},\ C[\ ],\ V)$.

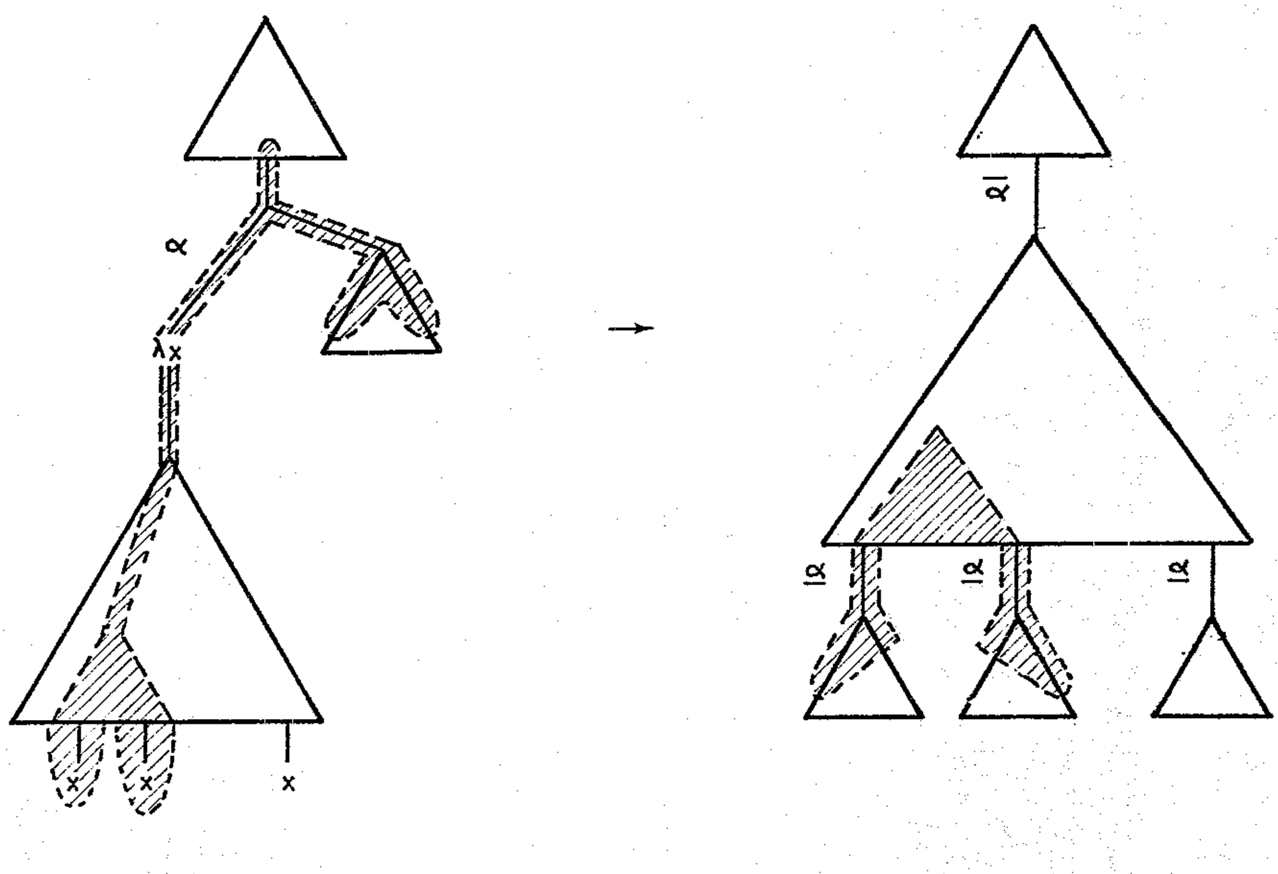
2) $u_1 = v\beta'$, $A_1[\ ] = ((\lambda x \cdot \{w,S\}\,[C[x,x,\ldots x;];])^{\alpha}\ D[\ ])^{b}$ si
$u = v\beta\overline{\alpha}\,w$, $A[\ ] = C\,[\underline{\alpha} \cdot D_1[\ ],\ \underline{\alpha} \cdot D_2[\ ],\ \ldots\ \underline{\alpha} \cdot D_n[\ ];\ ]$ où $n \geqslant 1$ et $b = D(\beta)$, $\beta' b = \beta$.

Dans les deux cas, on a $D[\ ] = [\ ]^{d} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i[\ ]\right)$ où $d = G(\tau(T))$

et les sous-contextes $D_i[\ ]$ ont pour coordonnées $(v\beta\overline{\alpha} w_i \gamma_i \underline{\alpha},\ D_i[\ ],\ V)$ où $(w_i,\ x^{\gamma_i},\ S)$ sont les coordonnées d'occurrences de la variable libre de S.

Cette définition correspond donc aux deux cas de la création de sous-contexte vus en 1.2.6. On dira aussi que $(u_1, A_1[\ ], U)$ génère strictement $(u, A[\ ], V)$. Donc si $U \overset{R}{\rightarrow} V$, tout sous-contexte de V est soit un résidu d'un sous-contexte de U, soit généré strictement par un sous-contexte de U. Dans les deux cas, l'objet associé est unique. De plus le *déplacement* de $(u, A[\ ], V)$ par rapport à son générateur strict $(u_1, A_1[\ ], U)$ sera la quantité u' telle que $u = u_1 u'$. Graphiquement, la définition précédente s'exprime par la figure suivante :





<u>2.1.2. Définition</u> : Si $U \overset{R}{\rightarrow} V$ et si $A[\ ]$ est un sous-contexte de V, le *générateur* de $A[\ ]$ dans U est le sous-contexte de U dont $A[\ ]$ est un résidu si $A[\ ]$ n'est pas créé par R ou le sous-contexte générateur strict sinon.

<u>2.1.3. Définition</u> : Si $U \overset{*}{\rightarrow} V$, le générateur dans U d'un sous-contexte de V est obtenu par réflexivité et transitivité sur la longueur de la réduction $U \overset{*}{\rightarrow} V$ à partir de la définition précédente.

Cette notion n'est pas cohérente dans le λ-calcul étiqueté et dépend de la réduction effectuée entre U et V. En effet si $U = ((\lambda x\cdot((\lambda y\cdot y^{e})^{d}\ x^{f})^{c})^{b}\ A)^{a}$ et $V = a\bar{b}c\bar{d}e\underline{d}f\underline{b}\cdot A$, on a $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et le générateur de $(a\bar{b}c\bar{d}e\underline{d}\ f\underline{b}\cdot A, V)$ dans U dépend de la réduction entre U et V. Une solution semble être une légère modification de la définition de générateur strict en considérant des paires "contextes - environnements". Mais ceci entraîne une complication excessive des objets manipulés. Nous supprimons cette difficulté en ne considérant que des réductions standards.

<u>2.1.4. Définition</u> : Nous dirons que la *réduction* standard $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V$ *génère le sous-contexte* de coordonnées $(v, A[\ ], V)$ ssi $U = V$ ou si $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V$ est de la forme $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V_1 \rightarrow V$ où le sous-contexte $A[\ ]$ est créé au cours de $V_1 \rightarrow V$ et $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V_1$ génère le générateur strict de $A[\ ]$ dans V_1. Nous parlerons aussi de *réduction génératrice du sous-contexte de coordonnées* $(v, A[\ ], V)$ *sous U*.

<u>2.1.5. Définition</u> : Si $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et si $(v, A[\ ], V)$ sont les coordonnées d'un sous-contexte de V, *le représentant canonique de ce sous-contexte sous U* a les coordonnées $(w, A[\ ], W)$ suivantes (et nous écrirons $(w, A[\ ], W) = c(U,(v, A[\ ], V)))$:

1) Si $U = V$, alors $w = v$ et $W = U$

2) Si $U \neq V$, soit $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V_1 \overset{R}{\rightarrow} V$ la réduction standard $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V$. Si $(w_1, A_1[\ ], W_1) = c(U, (v_1, A_1[\ ], V_1))$ sont les coordonnées du représentant canonique du générateur de $A[\ ]$ dans V_1, on a deux cas selon que ce dernier est un générateur strict ou non :

<u>Cas 1</u> : Si $(v, A[\ ], V)$ est un résidu de $(v_1, A_1[\ ], V_1)$, alors $w = w_1$, $A[\ ]= A_1[\ ]$, $W = W_1$.

<u>Cas 2</u> : Si $(v_1, A_1[\ ], V_1)$ est le générateur strict de $(v, A[\ ], V)$ alors $v = v_1t$ et si les coordonnées du radical R contracté sont (v_1u, R, V_1), on pose $w = w_1t$ et $W_1 \overset{S}{\to} W$ où les coordonnées de S sont (w_1u, S, W_1).

Cette définition a bien un sens car, dans le dernier cas, le radical S existe bien dans W_1 puisque le sous-contexte associé à R par 1.2.3 est contenu dans le sous-contexte $A_1[\ ]$ de V_1 (voir la définition 2.1.1). D'autre part, le radical S crée bien le sous-contexte $(w, A[\ ], W)$ toujours par la définition 2.1.1 de $A_1[\ ]$. Pour $(v, A[\ ], V)$ donné, le représentant canonique sous U est défini principalement par la réduction engendrée dans le dernier cas de la définition précédente. Cette réduction sera appelée la *réduction canonique associée* et consiste, en fait, à effectuer les étapes de la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ qui consiste à générer effectivement le sous-contexte $(v, A[\ ], V)$. Cette définition de représentant canonique est donc faite par récurrence sur la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ à partir de l'expression d'arrivée. Cela nous posera des problèmes car nous aimerions avoir au contraire une définition qui s'exprime en fonction de l'expression de départ U. Nous aurons donc besoin de renverser l'ordre de cette définition pour montrer que le représentant canonique d'un sous-contexte d'une expression donnée appartient à une même famille que ce sous-contexte.

2.2. Définitions et notations

Nous introduisons quelques notations destinées à avoir une expression plus parlante du représentant canonique.

<u>2.2.1. Notation</u> : Si $\xi = (u, A[\ ], U)$ et $\xi' = (uu', B[\ ], V)$, si $U \overset{*}{\to} V$ et si la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ est de la forme

$$U = U_o \overset{R_1}{\to} U_1 \overset{R_2}{\to} U_2 \dots \overset{R_n}{\to} U_n = V$$

où les radicaux contractés R_i sont tels que $\tau(R_i) \in E_o$ et ont comme coordonnées (uu_i, R_i, U_{i-1}) pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, nous *posons*

$$\xi' - \xi = (u', B[\ ], < u_1, u_2, \dots u_n >)$$

Remarquons que la condition $\tau(R_i) \in E_o$ n'est pas du tout restrictive puisque la notion de sous-expression est prise au sens large (voir 1.1.4), mais permet de définir $\xi' - \xi$ sans ambiguité. Si $n = 0$, le n-uplet $<u_1, u_2, \ldots u_n>$ sera noté $\emptyset$. Et nous *écrirons* $\xi' = \xi + \Delta\xi$ ssi $\Delta\xi$ est la quantité telle que $\Delta\xi = \xi' - \xi$.

2.2.2. Notation : Si $\Delta\xi = (u, A[\ ], <u_1, u_2, \ldots u_n>)$ et $\Delta\xi' = (v, B[\ ], <v_1, v_2, \ldots v_p>)$, *posons*

$$\Delta\xi \cdot \Delta\xi' = (uv, B[\ ], <u_1, u_2, \ldots u_n, uv_1, uv_2, \ldots uv_p>)$$

Cette dernière opération est associative et nous avons $(\xi+\Delta\xi) + \Delta\xi_1 = \xi + (\Delta\xi \cdot \Delta\xi_1)$ si $\xi \subset U$, $\xi_1 = \xi + \Delta\xi \subset U_1$ et $\xi_2 = \xi_1 + \Delta\xi_1 \subset U_2$ et si la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} U_1 \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} U_2$ est une réduction standard. Cette propriété peu sympathique sera en fait la seule que nous utiliserons et une dernière notation nous permet de donner une définition plus agréable du représentant canonique.

2.2.3. Notation : Si $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et si $\xi \subset V$, le générateur de ξ par la réduction standard $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ sera noté $gen(U,\xi)$.

2.2.4. Proposition : Soient $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $\xi \subset V$. Alors si $d(U,V) = 0$, on a $c(U,\xi) = \xi$. Si $d(U,V) > 0$, si la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ se décompose en $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1 \rightarrow V$ et si $\xi_1 = gen(V_1,\xi)$, alors on a :

$$c(U,\xi) = c(U,\xi_1) \qquad \text{si } \xi_1 \leq \xi$$

$$c(U,\xi) = c(U,\xi_1) + (\xi - \xi_1) \qquad \text{sinon}$$

Démonstration : immédiate par 2.1.5 et 2.2.1. □

2.3. Relation entre représentants canoniques et réductions génératrices

2.3.1. Proposition : Si $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ génère le sous-contexte de coordonnées $\xi = (v, A[\ ], V)$, alors $c(U,\xi) = \xi$.

Démonstration : immédiate d'après la définition précédente en effectuant une récurrence sur la longueur de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$. □

Nous voulons montrer que réciproquement la réduction canonique associée génère le sous-contexte représentant canonique. Pour cela, nous avons besoin de quelques propriétés supplémentaires des réductions standards.

2.3.2. Définitions et notations

Si $U \overset{R}{\to} V$, le *contractum* dans V *du radical* $R = ((\lambda x\cdot S)^{\alpha}T)^{\beta}$ de coordonnées (u,R,U) est la sous-expression $S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T]$ de V de coordonnées $(u\,\beta\,\bar{\alpha}, S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T], V)$.

Une *sous-expression* W de U est *à droite d'une sous-expression* V de U ssi V contient W (au sens large) ou si W et V étant disjoints, W est effectivement à droite de V. Formellement, si W et V ont comme coordonnées (w,W,U) et (v,V,U), on a W à droite de V ssi $w = vw_1$ ou $v = v_1\alpha[1]v_2$ et $w = v_1\alpha[2]w_2$.

Si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$, une *sous-expression* A de V est *à droite de la réduction standard* $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ ssi A est à droite du contractum du dernier radical contracté dans $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$.

Enfin, *la partie fonction du radical* $R = ((\lambda x\cdot S)^{\alpha}T)^{\beta}$ est la sous-expression $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$.

2.3.3. Lemme 1 : Si $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} (\lambda x\cdot V)^{\alpha} = \mathrm{Fon}(U)$ et si $a = D(\alpha)$, alors $(\lambda x\cdot V)^{a}$ est à droite de la réduction $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} \mathrm{Fon}(U)$.

Démonstration : Par récurrence sur la longueur ℓ de $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} \mathrm{Fon}(U)$. Si $\ell = 0$, le lemme est trivial. Si $\ell > 0$, alors on a par définition de Fon (voir 1.4.2) la réduction $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} \mathrm{Fon}(U)$ sous la forme :

$$U = (U_1U_2)^{\gamma} \overset{*}{\underset{norm}{\to}} ((\lambda y\cdot U_3)^{\beta}U_2)^{\gamma} \overset{R}{\to} W = \gamma\bar{\beta}\cdot U_3[y\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \overset{*}{\underset{norm}{\to}} (\lambda x\cdot V)^{\alpha}$$

où $\mathrm{Fon}(U_1) = (\lambda y\cdot U_3)^{\beta}$. Donc $(\lambda x\cdot V)^{\alpha} = \gamma\bar{\beta}\cdot(\lambda x\cdot V)^{\alpha_1}$ et, si $W = \gamma\bar{\beta}\cdot W_1$, on a $W_1 \overset{*}{\underset{norm}{\to}} (\lambda x\cdot V)^{\alpha_1}$ où $\mathrm{Fon}(W_1) = (\lambda x\cdot V)^{\alpha_1}$. On a donc deux cas. Soit ℓ_1 la longueur de cette dernière réduction. On a $\ell_1 < \ell$. Donc si $\ell_1 > 0$, par récurrence $(\lambda x\cdot V)^a$ est à droite de $W_1 \overset{*}{\underset{norm}{\to}} Fon(W_1)$, donc à droite de $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} Fon(U)$, en posant $a = D(\alpha) = D(\alpha_1)$. Si $\ell_1 = 0$, on a $W_1 = Fon(W_1) = (\lambda x\cdot V)^{\alpha_1}$. Or le contractum de R dans W est $W_1 = U_3[y\backslash \underline{\beta}\cdot U_2]$ qui contient $(\lambda x\cdot V)^a$ où $a = D(\alpha) = D(\alpha_1)$. □

<u>2.3.4. Proposition</u> : La réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V \overset{R}{\to} W$ est une réduction standard ssi la partie fonction de R est à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur $<\ell\ , \|U\|>$ où ℓ est la longueur de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ et $\|U\|$ est la taille de U. Si $\ell = 0$, la proposition est triviale. Si $\ell > 0$, alors raisonnons par cas sur la forme de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V \overset{R}{\to} W$.

<u>Cas 1</u> : $U = x^\alpha$. Alors $\ell = 0$ et ce cas est déjà vu.

<u>Cas 2</u> : $U = (\lambda x\cdot U_1)^\alpha$. Alors $V = (\lambda x\cdot V_1)^\alpha$, $W = (\lambda x\cdot W_1)^\alpha$ et $U_1 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_1 \overset{R}{\to} W_1$. Par récurrence sur la taille, on a le résultat voulu.

<u>Cas 3</u> : $U = (U_1U_2)^\alpha \overset{*}{\underset{st}{\to}} V = (V_1V_2)^\alpha \overset{R}{\to} W = (W_1W_2)^\alpha$ où $U_1 \overset{*}{\to} V_1 \overset{*}{\to} W_1$ et $U_2 \overset{*}{\to} V_2 \overset{*}{\to} W_2$. De plus la réduction $U \overset{*}{\to} V$ est de la forme $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} (V_1U_2) \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$. Soit ℓ_2 la longueur de la réduction $U_2 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_2$. On a deux cas. Si $\ell_2 > 0$, on a la partie fonction de R à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ ssi la partie fonction de R est à droite de $U_2 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_2$, et donc par récurrence ssi $U_2 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_2 \overset{R}{\to} W_2$ est standard, c'est-à-dire ssi $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V \overset{R}{\to} W$ est standard. Si $\ell_2 = 0$, on a soit R dans V_1 et on applique le raisonnement précédent sur $U_1 \overset{*}{\to} W_1$, soit R dans $V_2 = U_2$ et alors la réduction $(U_1U_2)^\alpha \overset{*}{\underset{st}{\to}} (V_1U_2)^\alpha \overset{R}{\to} (V_1W_2)^\alpha$ est standard.

<u>Cas 4</u> : $U = (U_1U_2)^\alpha \overset{*}{\to} ((\lambda x\cdot A)^\beta B)^\alpha \to \alpha\bar{\beta}\cdot A[x\backslash \underline{\beta}\cdot B] \overset{*}{\to} W = \alpha\bar{\beta}\cdot W_1$
On a deux sous-cas. Si V est entre $\alpha\bar{\beta}\cdot A[x\backslash \underline{\beta}\cdot B]$ et W, alors comme $U \overset{*}{\to} V$ est standard, on a $(\lambda x\cdot A)^\beta = Fon(U_1)$ et $B = U_2$. Donc la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V \overset{R}{\to} W$ est standard ssi la réduction $\alpha\bar{\beta}\cdot A[x\backslash \underline{\beta}\cdot B] \overset{*}{\underset{st}{\to}} V \overset{R}{\to} W$ est standard ssi, par récurrence la partie fonction de R est à droite de $\alpha\bar{\beta}\cdot A[x\backslash \underline{\beta}\cdot B] \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$, c'est-à-dire à droite de $U \overset{*}{\to} V$. Si V est entre U et $((\lambda x\cdot A)^\beta B)^\alpha$, alors $V = ((\lambda x\cdot A)^\beta B)^\alpha = R$ et $W = \alpha\bar{\beta}\cdot A[x\backslash \underline{\beta}\cdot B]$. Et en appliquant la proposition II.1.4.3, la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V \overset{R}{\to} W$ est de la forme :

$$U = (U_1U_2)^\alpha \overset{*}{\underset{norm}{\to}} ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha \overset{*}{\underset{st}{\to}} ((\lambda x\cdot A)^\beta U_2)^\alpha \overset{*}{\underset{st}{\to}} ((\lambda x\cdot A)^\beta B)^\alpha \overset{R}{\to} \alpha\bar{\beta}\cdot A[x\backslash \underline{\beta}\cdot B] = W$$

où $(\lambda x \cdot U_3)^\beta = \text{Fon}(U_1)$. Donc si cette réduction est standard on a $U_3 = A$ et $U_2 = B$ et le lemme 1 indique que la partie fonction de R est à droite de $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$. Réciproquement, si la partie fonction de R est à droite de $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$, on a $U_3 = A$ et $U_2 = B$ et donc la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V \overset{R}{\to} W$ est standard. □

En fait, c'est la définition de réduction standard donnée par Curry & Feys[14]. Ceci signifie donc que la réduction $U \overset{*}{\to} V \overset{*}{\to} W$ est standard ssi $U \overset{*}{\to} V$ et $V \overset{*}{\to} W$ sont deux réductions standards et si la partie fonction du premier radical contracté dans la réduction $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ est à droite de $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$. Intuitivement, cette proposition est la combinaison de deux phénomènes :

1) les radicaux créés ont leur partie fonction à droite du contractum du radical créateur,

2) si $U \overset{R}{\to} V$, les radicaux résidus dans V sont à droite du contractum ssi ils sont résidus d'un radical à droite de la partie fonction de R dans U. Mais nous verrons plus en détail cette propriété par la suite.

<u>2.3.5. Proposition</u> : Si $U \overset{*}{\to} V$, si $\xi \subset V$ et si $c(U,\xi) \subset W$, alors la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ génère $c(U,\xi)$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que la réduction canonique associée à $c(U,\xi)$ par 2.1.5 est standard. Raisonnons par récurrence sur $d(U,V)$ si $\xi \subset V$.

<u>Cas 1</u> : Si $d(U,V) = 0$, alors $U = V$ et $c(U,\xi) = \xi$. Ce cas est trivial.

<u>Cas 2</u> : Si $d(U,V) > 0$, la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ se décompose en $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V_1 \to V$. Soit $\xi_1 = \text{gen}(V_1,\xi)$. Alors on a deux sous-cas.

<u>Cas 2.1</u> : On a $\xi_1 \leqslant \xi$. Alors $c(U,\xi) = c(U,\xi_1)$ et ce cas se traite par récurrence.

<u>Cas 2.2</u> : ξ_1 est le générateur strict de ξ. Alors $\xi' = c(U,\xi) = c(U,\xi_1) + (\xi - \xi_1) \subset W$. Posons $c(U,\xi_1) = \xi'_1 \subset W_1$. Par récurrence, la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} W_1$ génère ξ'_1. Or ξ'_1 est clairement le générateur strict de ξ' par

définition. Il reste donc à montrer que $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W_1 \overset{S}{\to} W$ est standard. Par 2.3.4, il suffit de démontrer que la partie fonction de S est à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W_1$. Ceci n'a d'intérêt que si $d(U,W_1) \geqslant 1$, donc si les réductions $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W$ et $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ se décomposent en

$$U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W_2 \overset{S_1}{\to} W_1 \overset{S}{\to} W$$

et

$$U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_2 \overset{R_1}{\to} V_3 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_1 \overset{R}{\to} V$$

où $\xi_1' = \xi_2' + (\xi_3 - \xi_2)$, $\xi_2' = c(U,\xi_2)$ et $\xi_3 \leqslant \xi_1$, avec $\xi_2' \subset W_2$, $\xi_2 \subset V_2$ et $\xi_3 \subset V_3$, en appliquant la définition de représentant canonique (voir 2.2.4). Posons :

$$\xi' - \xi_1' = \xi - \xi_1 = (\delta, A[\ ], <\rho>)$$

$$\xi_1' - \xi_2' = \xi_3 - \xi_2 = (\delta_1, A_1[\ ], <\rho_1>)$$

$$\xi_2 = (v_2, A_2[\ ], V_2)$$

$$\xi_2' = (w_2, A_2[\ ], W_2)$$

$$\xi_1 = (v_1, A_1[\ ], V_1)$$

Comme ξ_1 est le générateur strict de ξ, le contexte associé en 1.2.4 au radical R est contenu dans le sous-contexte $A_1[\ ]$de coordonnées ξ_1 et donc $\xi_3 \leqslant \xi_1$ implique que R est résidu d'un radical R' de V_3 dont son contexte associé par 1.2.4. est aussi contenu dans ξ_3. Or la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ est standard et, par définition (voir II.1.4.1), le radical R' est à droite du premier radical contracté par $V_3 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$. Donc la partie fonction de R' est à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_3$ par 2.3.4. Calculons explicitement les coordonnées de la partie fonction de R' et du contractum R_1' de R_1 dans V_3, en posant $R_1 = ((\lambda x_1 \cdot C_1)^{a_1} D_1)^{b_1}$ et $R' = ((\lambda x' \cdot C')^{\alpha} D')^{b}$ où on peut toujours supposer $b, b_1 \in E_0$. Les coordonnées de R_1 sont $(v_2\rho_1, R_1, V_2)$ et celles de R_1' sont donc $(v_2\rho_1 b_1 \bar{\alpha}_1, R_1', V_3)$. Les coordonnées de R sont $(v_1\rho, R, V_1)$ et $\xi_3 = (v_2\delta_1, A_1[\ ], V_3)$; donc celles de R' sont $(v_2\delta_1\rho, R', V_3)$ et sa partie fonction a $(v_2\delta_1\rho b[1]\alpha', (\lambda x' \cdot C')^{a}, V_3)$ comme coordonnées si $\alpha = \alpha' a$ et $a \in E_0$. Or les coordonnées de S_1 et S sont

$(w_2\rho_1,\ S_1,\ W_2)$ et $(w_2\delta_1\rho,\ S,\ W_1)$. De plus, les radicaux S_1 et S qui correspondent à R_1 et R ont leurs contextes associés par 1.2.4 contenus dans ξ_2 et ξ_1, puisque ces deux derniers génèrent strictement ξ_3 et ξ. Donc $S_1 = ((\lambda y_1^{\circ} \cdot E_1)^{\alpha_1} F_1)^{b_1}$ et $S = ((\lambda y \cdot E)^{\alpha} F)^{b}$ et les coordonnées du contractum S'_1 de S_1 dans W_1 et de la partie fonction de S sont $(w_2\rho_1 b_1 \bar{\alpha}_1, S'_1, W_1)$ et $(w_2\delta_1\rho b[1]\alpha',\ (\lambda y \cdot E)^{a},\ W_1)$. Donc comme la partie fonction de R' est à droite de R'_1, la partie fonction de S est aussi à droite de S'_1. $\square$

3) EXPRESSION DU REPRESENTANT CANONIQUE

Si $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $\xi \subset V$, nous donnons une expression récursive de $c(U,\xi)$ selon toutes les positions possibles de ξ dans V et selon la forme de la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V$. Nous allons voir apparaître trois grandes familles de cas dans cette étude exhaustive : un cas de récurrence sur U, V et ξ en 3.2., le cas des sous-contextes préfixes en 3.3 et le cas (le plus important) où on élimine des contractions inutiles pour ξ dans $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V$ en 3.4.

3.1. Corollaires de la définition

3.1.1. Proposition : Si $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} W$ est une réduction standard et si $\xi \subset W$, alors on a :

$$c(U,\xi) = c(U, \mathrm{gen}(V,\xi)) + (c(V,\xi) - \mathrm{gen}(V,\xi))$$

Démonstration : par récurrence sur $d(V,W)$. Si $d(V,W) = 0$, alors $V = W$, $c(V,\xi) = \xi = \mathrm{gen}(V,\xi)$ et on a bien $c(U,\xi) = c(U,\xi) + (\xi-\xi)$. Si $d(V,W) > 0$, alors la réduction $V \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} W$ se décompose en $V \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} W_1 \rightarrow W$. Posons $\xi_1 = \mathrm{gen}(W_1,\xi)$. On a deux cas :

Cas 1 : $\xi_1 \leqslant \xi$. Alors $c(U,\xi) = c(U,\xi_1)$, $c(V,\xi) = c(V,\xi_1)$ et $\mathrm{gen}(V,\xi) = \mathrm{gen}(V,\xi_1)$. Ce cas se traite donc par récurrence.

Cas 2 : ξ_1 est générateur strict de ξ. Donc $c(U,\xi) - c(U,\xi_1) = c(V,\xi) - c(V,\xi_1) = \xi - \xi_1$. De plus, on a $\mathrm{gen}(V,\xi) = \mathrm{gen}(V,\xi_1)$ par définition. Posons $c(U,\xi) \subset X$, $c(U,\xi_1) \subset X_1$ et $c(V,\xi) \subset Y$, $c(V,\xi_1) \subset Y_1$. On a par récurrence $c(U,\xi_1) = c(U,\mathrm{gen}(V,\xi_1)) + \Delta\xi$ et $c(V,\xi_1) = \mathrm{gen}(V,\xi_1) + \Delta\xi$. Or, par 2.3.5., les réductions $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} X_1 \rightarrow X$ et $V \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} Y_1 \rightarrow Y$ sont standards et, par la remarque de 2.2.2, on a :

$$c(U,\xi) = c(U,\mathrm{gen}(V,\xi)) + (\Delta\xi \cdot (\xi-\xi_1))$$

$$c(V,\xi) = \mathrm{gen}(V,\xi) + (\Delta\xi \cdot (\xi-\xi_1)). \quad \square$$

3.1.2. Lemme : Si $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} W$ est une réduction standard, si $\xi \subset W$ et si $c(V,\xi) \subset X$, alors la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} X$ est standard.

Démonstration : en appliquant la définition de $c(V,\xi)$ et en raisonnant par récurrence sur $d(V,W)$ qui est la longueur de $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ (voir II.3.7). Si $d(V,W) = 0$, alors $c(V,\xi) = \xi$ et $V = X$. Le lemme est alors trivial. Si $d(V,W) > 0$, la réduction canonique associée à $c(V,\xi)$ est exactement la réduction $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} X$ par 2.3.5. Il suffit donc de montrer en vertu de 2.3.4. que la partie fonction du premier radical contracté par $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} X$ est à droite de $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$. Par récurrence, on se ramène au cas où $d(V,X) = 1$, c'est-à-dire $V \overset{R'}{\to} X$, et où la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ se décompose en $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W_1 \overset{R}{\to} W$ avec ξ créé par R. La définition de $c(V,\xi)$ implique que R est un résidu de R'. Comme la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ est standard, le radical R' est à droite du premier radical contracté par $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$. Donc sa partie fonction est à droite de $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ par 2.3.4. □

3.1.3. Proposition : Si $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ est une réduction standard et si $\xi \subset W$, alors on a $c(U,\xi) = c(U, c(V,\xi))$.

Démonstration : par récurrence sur $d(V,W)$. Si $d(V,W) = 0$, alors $V = W$ et $c(V,\xi) = \xi$ et la proposition est triviale. Si $d(V,W) > 0$, alors la réduction $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ se décompose en $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W_1 \to W$. Posons $\xi_1 = gen(W_1,\xi)$. On a encore deux cas :

Cas 1 : $\xi_1 \lessdot \xi$. Alors $c(U,\xi) = c(U,\xi_1)$ et $c(V,\xi) = c(V,\xi_1)$ et ce cas se traite par récurrence.

Cas 2 : ξ_1 génère strictement ξ. Alors
$c(U,\xi) - c(U,\xi_1) = c(V,\xi) - c(V,\xi_1) = \xi - \xi_1$. Posons $c(V,\xi) \subset X$, $c(V,\xi_1) \subseteq X_1$. Le sous-contexte de coordonnées $c(V,\xi_1)$ est générateur strict de $c(V,\xi)$ et la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V \underset{st}{\overset{*}{\to}} X$ est standard par le lemme précédent. Or par 2.3.5., la réduction $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} X_1 \to X$ est la réduction $V \underset{st}{\overset{*}{\to}} X$. Donc
$c(U, c(V,\xi)) = c(U, c(V,\xi_1)) + (c(V,\xi) - c(V,\xi_1))$ par définition. D'où
$c(U, c(V,\xi)) = c(U,\xi_1) + (\xi-\xi_1) = c(U,\xi)$ par récurrence. □

3.2. Expression du représentant canonique (simplification sur la première composante de coordonnées)

3.2.1. : Proposition : Si $a \in E_o$ et $\alpha,\beta \in E$, on a :

$$c(\alpha\bar{\beta}\cdot U_1,\ (\alpha\bar{\beta}\ v_1,\ A[\ ],\ \alpha\bar{\beta}\cdot V_1)) = (\alpha\bar{\beta}w_1, A[\ ],\ \alpha\bar{\beta}\cdot W_1)$$

$$c(\alpha\underline{\beta}\cdot U_1,\ (\alpha\underline{\beta}\ v_1,\ A[\ ],\ \alpha\underline{\beta}\cdot V_1)) = (\alpha\underline{\beta}w_1, A[\ ],\ \alpha\underline{\beta}\cdot W_1)$$

$$c((\lambda x\cdot U_1)^a,\ (a[\lambda x]v_1,\ A[\ ],\ (\lambda x\cdot V_1)^a)) = (a[\lambda x]w_1, A[\ ],\ (\lambda x\cdot W_1)^a)$$

$$c((U_1U_2)^a,\ (a[1]v_1, A[],\ (V_1V_2)^a)) = (a[1]w_1,\ A[\ ],\ (W_1U_2)^a)$$

$$c((U_1U_2)^a,\ (a[2]v_2,\ A[],\ (V_1V_2)^a)) = (a[2]w_2,\ A[\ ],\ (U_1W_2)^a)$$

où on a $(w_i,\ A[\ ],\ W_i) = c(U_i,\ (v_i, A[\ ],\ V_i))$ pour $i = 1,2$ selon les cas.

Démonstration : Nous ne considérons que le cas où $U = \alpha\bar{\beta}\cdot U_1$ et $V = \alpha\bar{\beta}\cdot V_1$, car tous les autres cas se démontrent de manière identique. Nous raisonnons par récurrence sur $d(U,V)$ et nous posons $\xi = (\alpha\bar{\beta}v_1,\ A[\ ],\ V)$ et $\xi_1 = (v_1,\ A[\ ],\ V_1)$. Si $d(U,V) = 0$, alors $U = V$, $U_1 = V_1$ et $c(U,\xi) = \xi$, $c(U,\xi_1) = \xi_1$ et ce cas est trivial. Si $d(U,V) > 0$, alors $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ se décompose en $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V' \overset{R}{\to} V$. On peut toujours supposer $\iota(R) \in E_o$ sans perte de généralité (voir 1.1.4). Et donc $V' = \alpha\bar{\beta}\cdot V'_1$ et R est interne à V'_1. Donc la réduction $U_1 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_1$ se décompose en $U_1 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V'_1 \overset{R}{\to} V_1$. Posons $\xi' = gen(V',\xi)$ et $\xi'_1 = gen(V'_1,\xi_1)$. On a deux cas :

Cas 1 : $\xi' \leq \xi$. Alors on a aussi $\xi'_1 \leq \xi_1$ car les deux réductions $V' \overset{R}{\to} V$ et $V'_1 \overset{R}{\to} V_1$ sont isomorphes. Donc $c(U,\xi) = c(U,\xi')$ et $c(U_1,\xi_1) = c(U_1,\xi'_1)$. Par récurrence, on obtient donc le résultat voulu.

Cas 2 : ξ' est générateur strict de ξ. Alors, comme précédemment, on a ξ'_1 générateur strict de ξ_1. De plus, comme le sous-contexte de coordonnées ξ est dans V_1, on a ξ' contenu dans V'_1, c'est-à-dire $\xi' = (\alpha\bar{\beta}v'_1,\ A'[],V')$ et $\xi'_1 = (v'_1,\ A'[\ ],\ V'_1)$. En outre $\xi - \xi' = \xi_1 - \xi'_1 = (\delta,\ A[\ ],\ \langle\rho\rangle)$. Par récurrence, on a $c(U,\xi') = (\alpha\bar{\beta}w'_1,\ A'[\ ],\ \alpha\bar{\beta}\cdot W'_1)$ si $c(U_1,\ \xi'_1) = (w'_1,\ A'[\ ],\ W'_1)$.

D'où :

$$c(U,\xi) = c(U,\xi') + (\xi-\xi') = (\alpha\bar{\beta}w'_1\delta,\ A[\ ],\ \alpha\bar{\beta}\cdot W_1)$$

et

$$c(U_1,\xi_1) = c(U_1,\xi'_1) + (\xi_1-\xi'_1) = (w'_1\ \delta,\ A[\ ],\ W_1).\ \square$$

Corollaire : Si $\xi = (u,\ U_1,\ U) + (\xi_1 - (\varepsilon,\ U_1,\ U_1))$, alors $c(U,\xi) = (u,\ U_1,\ U) + (c(U_1,\ \xi_1) - (\varepsilon,\ U_1,\ U_1))$.

Ces équations montrent donc que générateurs et représentants canoniques récurrent bien sur la structure des expressions étiquetées. Il en est de même pour la notion de familles de sous-contextes.

3.2.2. Proposition : Si X et Y contiennent des sous-expressions de coordonnées (w,U,X) et (w,V,Y), si $X \overset{*}{\to} Y$ et si $(u,A[\ ],U) \leqslant (v,A[\ ],V)$ alors on a $((wu,A[\ ],X) \leqslant (wv, A[\ ],Y)$.

Démonstration : immédiate par récurrence sur $||X||$.

Cas 1 : Si $w = \varepsilon'$, ce cas est trivial.

Cas 2 : Si $w = \alpha\bar{\beta}w_1$, on a $X = \alpha\bar{\beta}\cdot X_1 \overset{*}{\to} Y = \alpha\bar{\beta}\cdot Y_1$. Donc $X_1 \overset{*}{\to} Y_1$ et cette réduction est isomorphe à la précédente. Par récurrence, on a $(w_1u,A[\ ],X_1) \leqslant (w_1v, A[\ ], Y_1)$. D'où $(wu, A[\ ], X) \leqslant (wv,A[\ ],Y)$.

Cas 3 : Si $w = \alpha\underline{\beta}w_1$ on se reporte au cas précédent.

Cas 4 : Si $w = a[\lambda x]w_1$, on a $X = (\lambda x\cdot X_1)^a$ et $Y = (\lambda x\cdot Y_1)^a$. Or $X \overset{*}{\to} Y$ implique $X_1 \overset{*}{\to} Y_1$ et cette réduction est isomorphe à la précédente. Donc, comme, par récurrence, on a $(u,A[\ ],U) \leqslant (v,A[\ ],V)$ qui implique $(w_1u,A[\ ], X_1) \leqslant (w_1v,A[\ ], Y_1)$, on a également $(wu,A[\ ],X) \leqslant (wv,A[\ ], Y)$.

Cas 5 : Si $w = a[1]\ w_1$, on a $X = (X_1X_2)^a$ et $Y = (Y_1Y_2)^a$. Donc $X \overset{*}{\to} Y$ implique $X_1 \overset{*}{\to} Y_1$ et $X_2 \overset{*}{\to} Y_2$. Donc U et V sont les sous-expressions de X_1 et Y_1 de coordonnées (w_1,U,X_1) et (w_1,V,Y_1). Par récurrence on a $(w_1u,A[\ ],W_1) \leqslant (w_1v,A[\ ], Y_1)$. D'où $(wu,A[\ ], X) \leqslant (wv,A[\ ], Y)$ puisque la réduction $X \overset{*}{\to} Y$ est constituée des deux réductions séparées $X_1 \overset{*}{\to} Y_1$ et $X_2 \overset{*}{\to} Y_2$.

Cas 6 : Si $w = a[2]\ w_2$, on se reporte au cas précédent. □

Corollaire : Si X, Y, Z contiennent des sous-expressions de coordonnées (u,U,X), (u,V,Y), (u,W,Z), si $X \overset{*}{\to} Y$ et $X \overset{*}{\to} Z$ et si $(v, A[\ ], V) \underset{U}{\sim} (w, A[\ ], W)$, alors on a aussi $(uv,A[\ ],Y) \underset{X}{\sim} (uw, A[\ ], Z)$.

3.3. Représentants canoniques des sous-contextes préfixes

3.3.1. Notations :

Nous adoptons une *notation vectorielle* $\vec{A}[\ ]$ qui sera considérée comme une abréviation textuelle de $A_1[\ ], A_2[\ ], \ldots A_n[\ ]$ si $n \geq 0$ et $A_i[\ ] \in \mathcal{C}_e$ pour tout i entre 1 et n. Et nous écrirons $\vec{A}[\ ] \in \vec{\mathcal{C}}_e$. De même, la notation $\vec{U}$ est une abréviation de $U_1, U_2, \ldots U_n$ si $n \geq 0$ et $U_i \in \Lambda_e$ pour tout i et nous écrivons $\vec{U} \in \vec{\Lambda}_e$.

Nous *désignons* par $\mathcal{C}''_e$ l'ensemble des contextes $A[\ ]$ tels que $A[\vec{B}[\ ]] \in \mathcal{C}_e$ si $\vec{B}[\ ] \in \vec{\mathcal{C}}_e$. Donc seuls les trous des contextes de $\mathcal{C}''_e$ peuvent avoir une étiquette vide ou incomplète.

3.3.2. Proposition : Si $(\varepsilon, A_i[\ ], W_i) = c(U_i,(\varepsilon,A_i[\ ], V_i))$ pour $i = 1,2$ et si $a \in E_o$ et $\alpha,\beta \in E$, on a :

$$
\begin{aligned}
c(\alpha\bar{\beta}\cdot U_1,(\varepsilon,\alpha\bar{\beta}\cdot A_1[\ ],\alpha\bar{\beta}\cdot V_1)) &= (\varepsilon,\alpha\bar{\beta}\cdot A_1[\ ],\alpha\bar{\beta}\cdot W_1)\\
c(\alpha\underline{\beta}\cdot U_1,(\varepsilon,\alpha\underline{\beta}\cdot A_1[\ ],\alpha\underline{\beta}\cdot V_1)) &= (\varepsilon,\alpha\underline{\beta}\cdot A_1[\ ],\alpha\underline{\beta}\cdot W_1)\\
c((\lambda x\cdot U_1)^a,(\varepsilon,(\lambda x\cdot A_1[\ ])^a,(\lambda x\cdot V_1)^a)) &= (\varepsilon,(\lambda x\cdot A_1[\ ])^a,(\lambda x\cdot W_1)^a)\\
c((U_1U_2)^a, (\varepsilon,(A_1[\ ]A_2[\ ])^a, (V_1V_2)^a)) &= (\varepsilon,(A_1[\ ]A_2[\ ])^a, (W_1W_2)^a)
\end{aligned}
$$

Démonstration : analogue à celle de 3.2.1. □

Corollaire : Si $B[\ ] \in \mathcal{C}''_e$ et si $\vec{A}[\ ] \in \vec{\mathcal{C}}_e$ et $\vec{U}, \vec{V} \in \vec{\Lambda}_e$, on a :

$$c(B[\vec{U}], (\varepsilon, B[\vec{A}[\ ]],B[\vec{V}])) = (\varepsilon, B[\vec{A}[\,]], B[\vec{W}])$$

où $c(U_i, (\varepsilon,A_i[\ ], V_i)) = (\varepsilon, A_i[\ ], W_i)$ pour tout i.

3.3.3. Lemme : Si $a \in E_o$, on a :

$$c(x^a, (\varepsilon, x^a, x^a)) = (\varepsilon, x^a, x^a)$$

$$c(U, (\varepsilon,[\ ]^a, V)) = (\varepsilon,[\ ]^a, U)$$

Démonstration : La première équation est triviale. Pour la seconde, on a forcément $G(\tau(U)) = a$ et donc $(\varepsilon,[\ ]^a,U) \leqslant (\varepsilon,[\ ]^a,V)$. □

3.3.4. Proposition : On a $c(U,(\varepsilon, A[\ ],V)) = (\varepsilon, A[\ ],U)$ si $A[\ ]$ est préfixe de U.

Démonstration : par récurrence sur $||U||$ en utilisant les deux propositions précédentes.□

3.3.5. Lemme : Si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ génère le sous-contexte de coordonnées ξ de V, alors $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ génère aussi tout sous-contexte de V qui contient ξ.

Démonstration : par récurrence sur $d(U,V)$ car si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ se décompose en $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ et si $\xi \subset \xi' \subset V$, on a aussi $gen(W,\xi) \subset gen(W,\xi') \subset W$. □

3.3.6. Lemme : Si $Fon(U) = (\lambda x \cdot V)^\alpha$, alors la réduction $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} Fon(U)$ génère le sous-contexte de coordonnées $(\varepsilon,[\ ]^\alpha, Fon(U))$.

Démonstration : par récurrence sur la distance $d(U, Fon(U))$. Si $U = Fon(U)$, c'est évident. Sinon la réduction $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} (\lambda x \cdot V)^\alpha$ se décompose en :

$$U = (U_1U_2)^\beta \overset{*}{\underset{norm}{\to}} ((\lambda y \cdot U_3)^\gamma U_2)^\beta \to \beta\bar{\gamma}.U_3[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U_2] = U' \overset{*}{\underset{norm}{\to}} (\lambda x \cdot V)^\alpha$$

où $Fon(U_1) = (\lambda y \cdot U_3)^\gamma$. De plus on a $Fon(U') = (\lambda x \cdot V)^\alpha$ et $\alpha = \beta\bar{\gamma}\alpha_1$. Par récurrence, la réduction $U' \overset{*}{\underset{norm}{\to}} Fon(U')$ génère le sous-contexte de coordonnées $(\varepsilon,[\ ]^\alpha, Fon(U'))$. Or, si on pose $\tau(U') = \beta\bar{\gamma}\delta$; le générateur dans U' du sous-contexte $[\ ]^\alpha$ préfixe de Fon(U') est un sous-contexte de coordonnées $(\varepsilon, \beta\bar{\gamma}\cdot A[\ ], U')$, puisque $\alpha = \beta\bar{\gamma}\alpha_1$ et la réduction $((\lambda y \cdot U_3)^\gamma U_2)^\beta \to U' \overset{*}{\underset{norm}{\to}} Fon(U)$ génère par définition le sous-contexte$(\varepsilon,[\ ]^\alpha,Fon(U))$. De plus le générateur de ce sous-contexte dans $((\lambda y \cdot U_3)^\gamma U_2)^\beta = U''$ a des coordonnées de la forme $(\varepsilon,((\lambda y \cdot A_3[\ ])^\gamma A_2[\ ])^\beta, U'')$ et donc contient le sous-contexte $(\varepsilon,[\ ]^\gamma,Fon(U_1))$. Comme par récurrence, la réduction $U_1 \overset{*}{\underset{norm}{\to}} Fon(U_1)$ génère ce dernier, la réduction $U \overset{*}{\underset{norm}{\to}} Fon(U)$ génère $(\varepsilon,[\ ]^\alpha,Fon(U))$ en appliquant 3.3.5.□

3.3.7. Proposition : Si $Fon(U_1) = (\lambda x \cdot U_3)^\beta$, on a

$$c((U_1U_2)^\alpha, (\varepsilon,\alpha\bar{\beta}\cdot A[\ ],\alpha\bar{\beta}\cdot V)) = c(\alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2], (\varepsilon,\alpha\bar{\beta}\cdot A[\ ],\alpha\bar{\beta}\cdot V))$$

Démonstration : Posons $\xi = (\varepsilon, \alpha\bar{\beta}\cdot A[\ ], \alpha\bar{\beta}\cdot V)$, $U = (U_1 U_2)^\alpha$, $U' = \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$ et $U'' = ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha$. On a gen(U',ξ) et gen(U",ξ) de la forme $(\varepsilon, \alpha\bar{\beta}\cdot A_1[\ ], U')$ et $(\varepsilon, ((\lambda x\cdot A_3[\ ])^\beta A_2[\ ])^\alpha, U'')$. Par les deux lemmes précédents, la réduction $U \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} U''$ génère gen(U",ξ). Donc, par 2.3.1., on a c(U,gen(U",ξ)) = gen(U",ξ). Comme gen(U",ξ) est générateur strict de gen(U',ξ), on a c(U,gen(U',ξ)) = gen(U',ξ). Donc, par 3.1.1. on a c(U,ξ) = c(U',ξ).□

3.3.8. Lemme 1 : Si U et V contiennent deux sous-contextes préfixes de coordonnées $(\varepsilon, A[\ ], U)$ et $(\varepsilon, A[\ ], V)$ et si $U \overset{*}{\rightarrow} V$, alors on a $(\varepsilon, A[\ ], U) \leqslant (\varepsilon, A[\ ], V)$.

Démonstration : comme les résidus sont cohérents, il suffit de considérer $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ et de raisonner par récurrence sur la taille de U. Le seul cas litigieux est quand la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ est de la forme :

$$U = (U_1 U_2)^\alpha \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^\alpha \rightarrow \alpha\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V = \bar{\alpha}\bar{\beta}\cdot V_1$$

où $\mathrm{Fon}(U_1) = (\lambda x\cdot U_3)^\beta$. Alors $A[\ ]$ ne peut être de la forme $(A_1[\ ]A_2[\ ])^\alpha$ ou $\alpha\bar{\beta}\cdot A_1[\ ]$, car alors il ne serait préfixe que de U ou V. Donc $A[\ ] = [\ ]^{\alpha_1}$ où $\alpha_1 \in E$ et $\alpha_1\alpha_2 = \alpha$. Et alors on a trivialement $(\varepsilon, A[\ ], U) \leqslant (\varepsilon, A[\ ], V)$. □

3.3.9. Lemme 2 : Si $(\varepsilon, A[\ ], W) = c(U,(\varepsilon, A[\ ], V))$, on a $W \overset{*}{\rightarrow} V$.

Démonstration : immédiate par récurrence sur $<d(U,V), \|U\|>$ en utilisant 3.3.2, 3.3.4 et 3.3.7. □

3.3.10. Proposition : On a $c(U,(\varepsilon, A[\ ],V)) \leqslant (\varepsilon, A[\ ],V)$.

Démonstration : en réunissant les lemmes 1 et 2. □

3.4. Représentant canonique (élimination des contractions inutiles)

Nous cherchons l'expression de c(U,ξ) lorsque $U = (U_1 U_2)^a$, $V = a\bar{\beta}\cdot V_1$ et $\xi = (a\bar{\beta}v_1\ , A[\ ], V)$ et $a \in E_o$. On peut en effet toujours se ramener au cas où $\tau(U) \in E_o$ en utilisant 3.2.1. La réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ est alors de la forme :

(i) $U = (U_1U_2)^a \underset{norm}{\overset{*}{\to}} U'' = ((\lambda x \cdot U_3)^\beta U_2)^a \to U' = a\bar{\beta} \cdot U_3[x \backslash \underline{\beta} \cdot U_2] \underset{st}{\overset{*}{\to}} V = \alpha\bar{\beta} \cdot V_1$

où $Fon(U_1) = (\lambda x \cdot U_3)^\beta$ et nous verrons que l'expression de $c(U,\xi)$ ne dépend que de la position de $gen(U'',\xi)$ dans U''. En fait, nous aurons trois cas qui correspondront à $gen(U'',\xi)$ dans U_3, dans U_2 ou chevauchant U_3 et U_2.

<u>3.4.1. Lemme</u> : Si $U = ((\lambda x \cdot U_1)^\beta U_2)^a \overset{*}{\to} V = a\bar{\beta} \cdot V_1$ et si $\xi = (a\bar{\beta}v_1, A[\,], V)$, trois cas sont seulement possibles pour $gen(U,\xi)$:

1) $gen(U,\xi) = (\varepsilon, ((\lambda x \cdot A_1[\,])^\beta A_2[\,])^a, U)$

2) $gen(U,\xi) \subset (a[2], U_2, U)$

3) $gen(U,\xi) \subset (a[1]\beta[\lambda x], U_1, U)$ et alors le sous-contexte de coordonnées $gen(U,\xi)$ ne contient aucune occurrence de la variable x liée par $(\lambda x \cdot U_1)^\beta$.

<u>Démonstration</u> : immédiate par récurrence sur $d(U,V)$ en appliquant les définitions 2.1 car la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ est de la forme $U \to a\bar{\beta} \cdot U_1[x \backslash \underline{\beta} \cdot U_2] \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$.□

Les trois propositions suivantes donnent l'expression de $c(U,\xi)$, si $\xi \subset V$ et si $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ est de la forme (i), selon les trois cas du lemme précédent appliqués à gen (U'',ξ).

<u>3.4.2. Proposition</u> : Si $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ est de la forme (i), si $\xi = (a\bar{\beta}v_1, A[\,], V)$ et si $gen(U'',\xi)$ est préfixe de U'', alors on a $c(U,\xi) = c(U',\xi)$.

<u>Démonstration</u> : On est donc dans le premier cas du lemme et on applique le même raisonnement que dans 3.3.7. □.

<u>3.4.3. Proposition</u> : Si $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ est de la forme (i), si $\xi = (a\bar{\beta}v_1, A[\,], V)$ et si $gen(U'',\xi) \subset (a[2], U_2, U'')$, alors on a :

1) $c(U',\xi) = (\alpha\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}w_2,\ A[\ ],\ W')$ où $(w_3,\ x^{\gamma_3},\ U_3)$ est une occurrence libre de x dans U_3 et
$W' = a\bar{\beta}\cdot C_3[\underline{\beta}\cdot W_2,\ \underline{\beta}\cdot U_2,\ \underline{\beta}\cdot U_2,\ \ldots\ \underline{\beta}\cdot U_2]$ si $C_3[;]\in\mathscr{C}_e$ est le plus grand préfixe de U_3 ne contenant pas x libre dont le trou distingué correspond à l'occurrence $(w_3,\ x^{\gamma_3},\ U_3)$

2) $c(U'',\xi) = (a[2]w_2,\ A[\ ],\ ((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}W_2)^a)$

3) $c(U,\xi) = (a[2]w_2,\ A[\ ],\ (U_1W_2)^a)$

Démonstration : immédiate en se servant de 3.1.1, 3.1.3 et 3.2.1 (corollaire). En effet, par 3.1.1, on a

$$c(U'',\xi) - c(U'',\ \mathrm{gen}(U',\xi)) = c(U',\xi) - \mathrm{gen}(U',\xi) = \Delta\xi$$

Or, comme $\mathrm{gen}(U'',\xi)\subset(a[2],\ U_2,U'')$, on a $\mathrm{gen}\ (U'',\xi) \leqslant \mathrm{gen}(U',\xi)$ par la définition de générateur. Donc la définition de représentant canonique implique $c(U'',\ \mathrm{gen}(U',\xi)) = \mathrm{gen}(U'',\xi)$.

On a donc :

$$\Delta\xi = c(U'',\xi) - \mathrm{gen}(U'',\xi) = c(U',\xi) - \mathrm{gen}(U',\xi)$$

Explicitons cette équation en posant $\Delta\xi = (u,\ A[\ ],\ \langle u_1,u_2,\ldots u_n\rangle)$. et $\mathrm{gen}(U'',\xi) = (a[2]t_2,\ A_2[\ ],\ U'')$. La définition de générateur donne $\mathrm{gen}(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}t_2,\ A_2[\ ],\ U')$ où $(w_3,\ x^{\gamma_3},U_3)$ est une occurrence de x libre dans U_3. On a donc $c(U'',\xi) = (a[2]t_2u,\ A[\ ],((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}W_2)^a)$ où la réduction $U_2 \xrightarrow[st]{*} W_2$ se décompose en :

$$U_2 = X_o \xrightarrow{R_1} X_1 \xrightarrow{R_2} X_2 \ldots \xrightarrow{R_n} X_n = W_2$$

où les radicaux R_i ont $(t_2u_i,\ R_i,\ X_{i-1})$ comme coordonnées. De même $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}t_2u,\ A[\ ],\ W')$ où la réduction $U' \xrightarrow[st]{*} W'$ se décompose en:

$$U' = a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] = Y_o \xrightarrow{S_1} Y_1 \xrightarrow{S_2} Y_2 \ldots \xrightarrow{S_n} Y_n = W'$$

où les radicaux S_i ont $(a\bar{\beta}w_3\gamma_3\beta t_2u_i,\ S_i,\ Y_{i-1})$ comme coordonnées.
Si $C_3[\,;\,]$ est le plus grand préfixe de U_3 ne contenant pas x libre dont le trou précisé avant le symbole ";" correspond au chemin $w_3\gamma_3$, on a bien $W' = a\bar{\beta}\cdot C_3[\underline{\beta}\cdot W_2,\ \underline{\beta}\cdot U_2,\ \underline{\beta}\cdot U_2,\ \ldots\ \underline{\beta}\cdot U_2]$.

On peut maintenant exprimer $c(U,\xi)$ en posant $\xi_2 = (t_2u,\ A[\ ],\ W_2)$. En effet, par 2.3.1 et 2.3.5, on a $c(U'',\ c(U'',\xi)) = c(U'',\xi)$. Donc $c(U_2,\ \xi_2) = \xi_2$ par 3.2.1. Or par 3.1.3, on a $c(U,\xi) = c(U,\ c(U'',\xi))$. Donc à nouveau par 3.2.1, on a $c(U,\xi) = (a[2]t_2u,\ A[\ ],\ (U_1\ W_2)^a)$. □

3.4.4. Lemme 1 : Si $U \overset{*}{\to} V$ et $U \overset{*}{\to} W$ et si $U[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X] \overset{*}{\to} V[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X] = W[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$, alors on a $V = W$.

Démonstration : Pour toute expression A, nous désignons provisoirement par A^* la quantité $A[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$. Nous raisonnons par récurrence sur $\langle d(U,V), \|U\| \rangle$ et examinons tous les cas possibles pour les réductions $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ et $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$.

Cas 1 : $U = y^\beta$. Alors $U = V = W$.

Cas 2 : $U = (\lambda x\cdot U_1)^\beta$. Alors $V = (\lambda x\cdot V_1)^\beta$ et $W = (\lambda x\cdot W_1)^\beta$ où $U_1 \overset{*}{\to} V_1$ et $U_1 \overset{*}{\to} W_1$. De plus $U^* = (\lambda x\cdot U_1^*)^\beta$, $V^* = (\lambda x\cdot V_1^*)^\beta$ et $W^* = (\lambda x\cdot W_1^*)^\beta$. Donc $U_1^* \overset{*}{\to} V_1^* = W_1^*$ et par récurrence $V_1 = W_1$, donc $V = W$.

Cas 3 : $U = (U_1U_2)^\beta$, $V = (V_1V_2)^\beta$ et $W = (W_1W_2)^\beta$. Ce cas se traite par la même récurrence que précédemment.

Cas 4 : $U = (U_1U_2)^\beta$, $V = (V_1V_2)^\beta$ et $W = \beta\bar{\gamma}\cdot W_1$. Ce cas est impossible car alors on a $V^* = (V_1^*\ \ V_2^*)^\beta \neq W^* = \beta\bar{\gamma}\cdot W_1^*$.

Cas 5 : $U = (U_1U_2)^\beta$, $V = \beta\bar{\gamma}\cdot V_1$ et $W = \beta\bar{\gamma}\cdot W_1$. Alors on a $U \underset{norm}{\overset{*}{\to}} \beta\bar{\gamma}\cdot U_3[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U_2] = U'$ où $(\lambda y\cdot U_3)^\gamma = \mathrm{Fon}(U_1)$ et $U' \overset{*}{\to} V$, $U' \overset{*}{\to} W$. Or $d(U',V) < d(U,V)$ et donc par récurrence on a $V = W$. □

3.4.5. Proposition : Si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ est de la forme (i), si $\xi = (a\bar{\beta}v_1, A[\ ], V)$ et si $gen(U'',\xi) \subset (a[1]\beta\,[\lambda x], U_3, U'')$, alors on a :

1) $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3, A[\ ], a\bar{\beta}\cdot W_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2])$ où $U_3 \overset{*}{\to} W_3$

2) $c(U'',\xi) = (a[1]\beta[\lambda x]w_3, A[\ ], ((\lambda x\cdot W_3)^{\beta}\, U_2)^{a})$

3) $c(U,\xi) = c(U, c(U'',\xi)) = (a[1]w_1, A[\ ], (W_1U_2)^{a})$

Démonstration : analogue à celle de 3.4.3. En effet, par 3.1.1, on a :

$$c(U'',\xi) - c(U'',gen(U',\xi)) = c(U',\xi) - gen(U',\xi) = \Delta\xi$$

Or comme $gen(U'',\xi) \subset (a[1]\beta[\lambda x], U_3, U'')$, on a $gen(U'',\xi) \leq gen(U',\xi)$ par la définition de générateur. Donc la définition de représentant canonique implique $c(U'', gen(U',\xi)) = gen(U'',\xi)$. D'où

$$\Delta\xi = c(U'',\xi) - gen(U'',\xi) = c(U',\xi) - gen(U',\xi)$$

Posons $\Delta\xi = (u, A[\ ], \langle u_1,u_2,\dots u_n\rangle)$ et $gen(U'',\xi) = (a[1]\beta[\lambda x]\ t_3, A_3[\ ], U'')$. La définition de générateur donne $gen(U'',\xi) = (a\bar{\beta}t_3, A_3[\ ], U')$. On a donc $c(U'',\xi) = (a[1]\beta[\lambda x]t_3u, A[\ ], ((\lambda x\cdot W_3)^{\beta}\, U_2)^{a})$ où la réduction $U_3 \overset{*}{\underset{st}{\to}} W_3$ se décompose en

$$U_3 = X_o \overset{R_1}{\to} X_1 \overset{R_2}{\to} X_2 \dots \overset{R_n}{\to} X_n = W_3$$

où les radicaux R_i ont (t_3u_i, R_i, X_{i-1}) comme coordonnées. De même $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}t_3u, A[\ ], W')$ où la réduction $U' \underset{st}{\to} W'$ se décompose en

$$U' = a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] = Y_o \overset{S_1}{\to} Y_1 \overset{S_2}{\to} Y_2 \dots \overset{S_n}{\to} Y_n = W'$$

où les radicaux S_i ont $(a\bar{\beta}t_3u_i, S_i, Y_{i-1})$ comme coordonnées. Cette réduction est donc isomorphe à la précédente. Donc $W' = a\bar{\beta}\cdot W_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$.

Posons $\xi_3 = (\beta[\lambda x]t_3u, \; A[\;], (\lambda x\cdot W_3)^{\beta})$. Les propositions 2.3.1 et 2.3. impliquent $c(U'', c(U'',\xi)) = c(U'',\xi)$. Donc $c(U_3, \xi_3) = \xi_3$ par 3.2.1. Or, par 3.1.3., on a $c(U,\xi) = c(U, c(U'',\xi))$ puisque la réduction $U \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} U'' \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ est standard. Donc à nouveau, par 3.2.1., on a $c(U,\xi) = (a[1]w_1, A[\;], (W_1U_2)^{a})$ si $c(U_1,\xi_3) = (w_1, A[\;], W_1)$.

Remarquons finalement par le lemme précédent que W_3 est bien défini une fois que U et ξ sont donnés et que l'énoncé de la proposition définit sans ambiguité $c(U,\xi)$. □

Les propositions 3.2.1, 3.3.2, 3.3.4, 3.3.7 , 3.4.2, 3.4.3, 3.4.5 définissent l'expression du représentant canonique $c(U,\xi)$ en fonction de U et nous avons donc bien considéré tous les cas possibles grâce au lemme 3.4.1.

4) THEOREMES SUR LES REPRESENTANTS CANONIQUES

4.1. Sous-contextes et représentants canoniques sont dans une même famille

4.1.1. Lemme : Si $U \overset{*}{\to} V$, si $\xi \subset V$ et si $c(U,\xi) \subset W$, alors $d(U,W) \leqslant d(U,V)$.

Démonstration : immédiate car, par 2.3.5, la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ est la réduction canonique associée à $c(U,\xi)$ (voir 2.1.5). Or la définition 2.1.5, revue en 2.2.4., implique trivialement $d(U,W) \leqslant d(U,V)$.□

4.1.2. Théorème : Si $U \overset{*}{\to} V$ et si $\xi \subset V$, on a $c(U,\xi) \underset{U}{\sim} \xi$.

Démonstration : par récurrence sur $\langle d(U,V), ||U||\rangle$. On se sert de l'expression de $c(U,\xi)$ donnée dans la partie 3. Si on est dans les cas 3.2, alors le théorème est vrai par récurrence sur $||U||$ en se servant de 3.2.2 (corollaire). Si ξ est un sous-contexte préfixe comme dans 3.3, alors on a $c(U,\xi) \leqslant \xi$ directement par 3.3.10. Il reste les cas 3.4 et nous supposons donc la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ de la forme donnée par (i).

Cas 1 : $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.2. Alors $c(U,\xi) = c(U',\xi)$. Or $d(U',V) < d(U,V)$. Donc $c(U',\xi) \sim \xi$ par récurrence.

Cas 2 : $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.3 (voir figure 1). Comme $d(U',V) < d(U,V)$, on a $c(U',\xi) \sim \xi$ par récurrence. Or $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}w_2, A[\,], W')$ où (w_3, x^{γ_3}, U_3) est une occurrence libre de x dans U_3. De plus, la proposition 3.4.3 indique que $W' = a\bar{\beta}\cdot C_3[\underline{\beta}\cdot W_2, \underline{\beta}\cdot U_2, \underline{\beta}\cdot U_2, \ldots \underline{\beta}\cdot U_2]$ où $C_3[;]$ est le plus grand préfixe de U_3 ne contenant pas la variable x libre et dont le trou distingué correspond à l'occurrence (w_3, x^{γ_3}, U_3). Comme $U_2 \overset{*}{\to} \dot{W}_2$, on a

$$W' \to a\bar{\beta}\cdot C_3\,[\underline{\beta}\cdot W_2, \underline{\beta}\cdot W_2, \underline{\beta}\cdot W_2, \ldots \underline{\beta}\cdot W_2] = a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$$

et de plus, l'expression $a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot W_2]$ contient un sous-contexte de coordonnées $\xi' = (a\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}w_2, A[\ ], a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot W_2])$. On a donc $c(U',\xi) \leq \xi'$

puisque la réduction $W' \xrightarrow{*} a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot W_2]$ est complètement disjointe du résidu de $c(U',\xi)$. Or si $\xi'' = (a[2]w_2,\ A[\ ],\ ((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}\ W_2)^a)$, on a $c(U,\xi) \leqslant \xi'' \leqslant \xi'$ par définition de résidu. En résumé, on a $\xi \sim c(U',\xi) \leqslant \xi'$ et $c(U,\xi) \leqslant \xi'$. Donc $c(U,\xi) \sim \xi$.

<u>Cas 3</u> : $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.5 (voir figure 2). Comme $d(U',V) < d(U,V)$, on a $c(U',\xi) \sim \xi$ par récurrence. Or $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3,\ A[\ ], W')$ où $W' = a\bar{\beta}\cdot W_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$ et $U_3 \xrightarrow{*} W_3$. De plus, on a $c(U'',\xi) = \xi'' = (a[1]\beta[\lambda x]w_3\ ,\ A[\ ],\ W'')$ si $W'' = ((\lambda x\cdot W_3)^{\beta}U_2)^a$. Par définition de résidu et comme $W'' \to W'$, on a $\xi'' \leqslant c(U',\xi)$. Or le lemme précédent implique $d(U',W') \leqslant d(U',V)$. Donc :

$$\begin{aligned} d(U,W'') &= d(U,U'') + d(U'',W'') \\ &< d(U,U'') + 1 + d(U'',W'') \\ &= d(U,U'') + 1 + d(U',W') \\ &\leqslant d(U,U'') + 1 + d(U',V) = d(U,V) \end{aligned}$$

puisque $d(U'',W'') = d(U',W') = d(U_3,W_3)$. Donc, par récurrence, on a $\xi'' \sim c(U,\xi'') = c(U,\xi)$. En résumé, on a $c(U,\xi) \sim \xi'' \leqslant c(U',\xi) \sim \xi$. Donc $c(U,\xi) \sim \xi$. □

<u>Figure 1</u> (Générateur de ξ dans U'' est dans U_2)

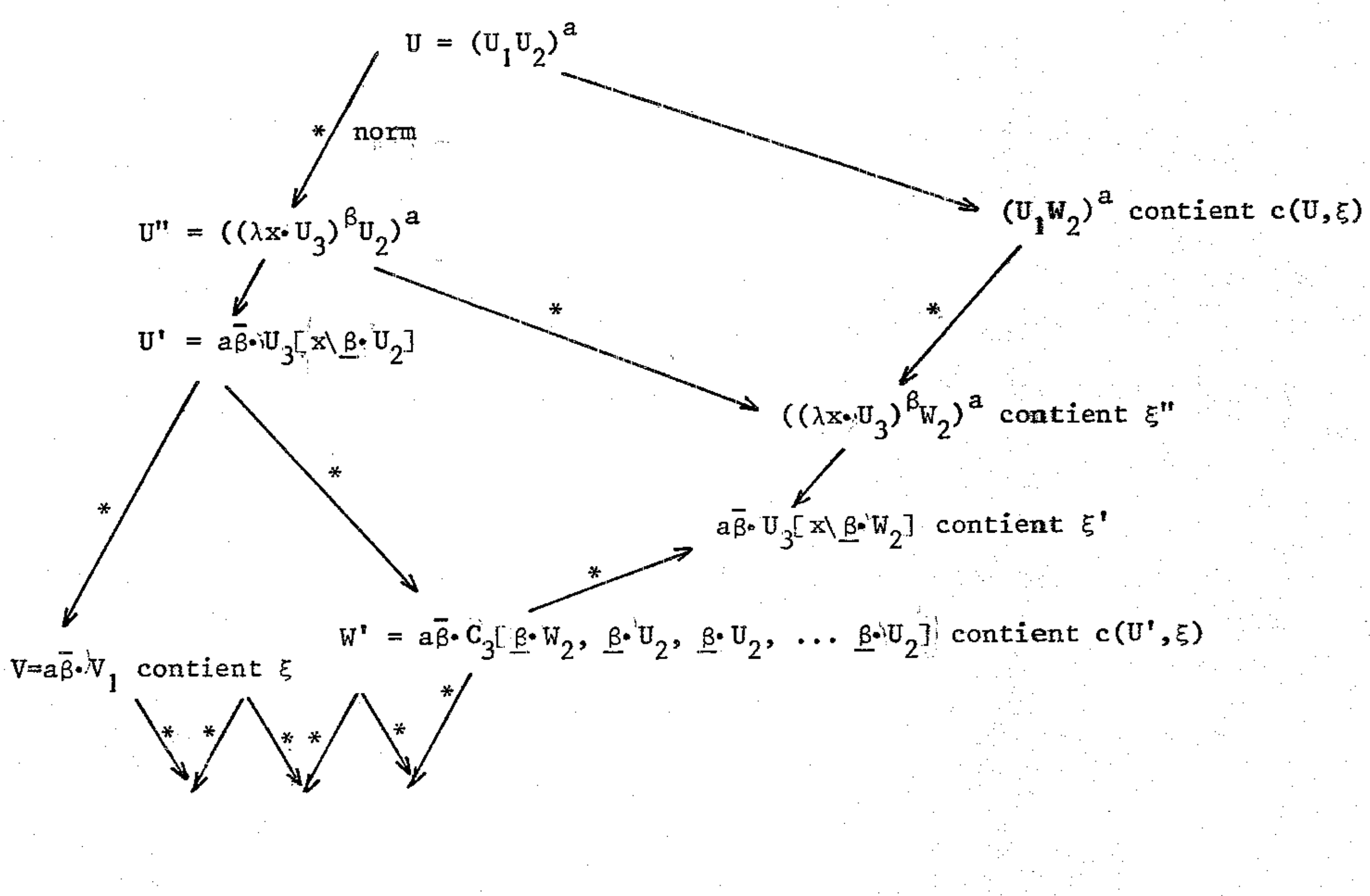
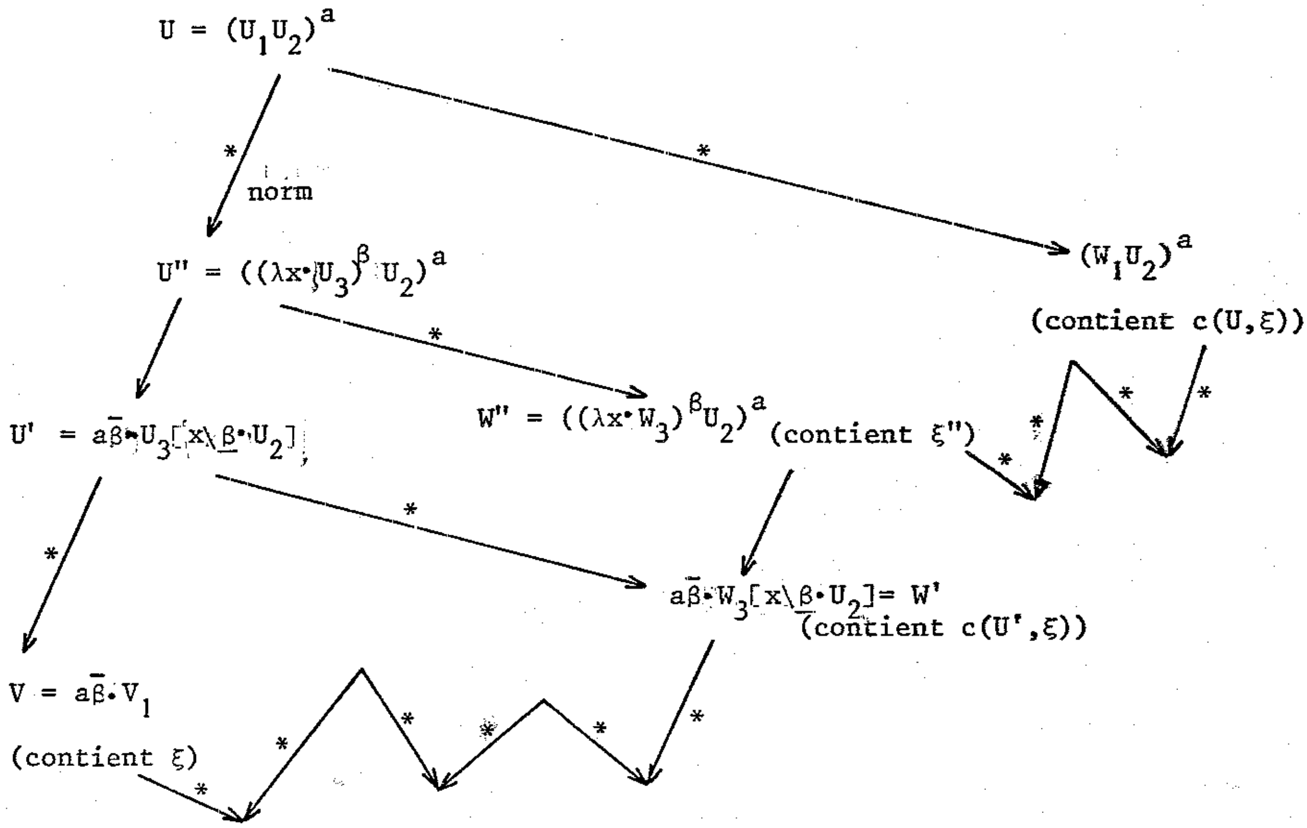


Figure 2 (générateur de ξ dans U" est dans U_3)



4.2. Les sous-contextes d'une même famille ont le même représentant canonique *

4.2.1. Lemme : Si Fon(U) existe, alors on a Fon $(U[x\backslash\underline{\alpha}\cdot V])=\mathrm{Fon}(U)[x\backslash\underline{\alpha}\cdot V]$.

Démonstration : Par récurrence sur d(U,Fon(U)). En effet, posons $X' = X[x\backslash\underline{\alpha}\cdot V]$pour toute expression X. Si d(U,Fon(U)) = 0, alors $U = \mathrm{Fon}(U) = (\lambda y\cdot U_1)^{\alpha}$. Donc $U' = \mathrm{Fon}(U') = (\lambda y\cdot U'_1)^{\alpha}$. Sinon, on a $U = (U_1U_2)^{\alpha}$ et $\mathrm{Fon}(U) = \mathrm{Fon}(\alpha\bar{\beta}\cdot U_3[y\backslash\underline{\beta}\cdot U_2])$ où $\mathrm{Fon}(U_1) = (\lambda y\cdot U_3)^{\beta}$. Donc $U' = (U'_1\ U'_2)^{\alpha}$ et $\mathrm{Fon}(U'_1) = (\lambda y\cdot U'_3)^{\beta}$ par récurrence. D'où $\mathrm{Fon}(U') = \mathrm{Fon}(\alpha\bar{\beta}\cdot U'_3[y\backslash\underline{\beta}\cdot U'_2])$ par définition. Et en se servant du lemme II.1.3.2, comme y peut toujours remplir les bonnes conditions, on a :

* Ce paragraphe est démontré indépendamment en 5.

$Fon(U') = Fon((\alpha\bar{\beta}\cdot U_3\ [y\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]\ )\ [x\backslash\underline{\beta}\cdot V]) = Fon(U)[x\backslash\underline{\beta}\cdot V]$ par récurrence. □

<u>4.2.2. Lemme</u> : Si $U \overset{*}{\to} V$ et $X \overset{*}{\to} Y$, si $U' = U[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ et $V' = V[x\backslash\underline{\alpha}\cdot Y]$ et s'il existe deux sous-contextes de coordonnées $\xi = (v,A[\ ], V)$ et $\xi' = (v,A[\ ],V')$, alors $c(U',\xi') = (w,A[\ ], W\ [x\backslash\underline{\alpha}\cdot X])$ où $c(U,\xi) = (w,A[\ ], W)$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur $<d(U,V),\ ||U||>$ en se servant de l'expression de $c(U,\xi)$ décrite dans la partie 3. Remarquons que $U' \overset{*}{\to} V'$ par II.1.3.5 et qu'on peut donc parler de $c(U',\xi')$. Supposons par la suite $b \in E_o$ et $\beta,\ \gamma \in E$.

<u>Cas 1</u> : $U = x^b$. Alors $U = V$ et $U' = b\underline{\alpha}\cdot X \overset{*}{\to} V' = b\underline{\alpha}\cdot Y$. Comme $\xi \subset V$ et $\xi' \subset V'$, on a donc $\xi = (\varepsilon,[\ ]^b, V)$ et $\xi' = (\varepsilon,[\ ]^b, V')$. Donc par 3.3.3, on a $c(U,\xi) = (\varepsilon,[\ ]^b, U)$ et $c(U',\xi') = (\varepsilon,[\ ]^b, U')$.

<u>Cas 2</u> : $U = y^b$. Alors $U = V = U' = V'$. Donc $\xi = \xi'$ et $c(U,\xi) = c(U',\xi')$.

<u>Cas 3</u> : $U = b\bar{\gamma}\cdot U_1$. Alors $V = b\bar{\gamma}\cdot V_1$ et $U_1 \overset{*}{\to} V_1$. Posons $U_1' = U_1[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ et $V_1' = V_1\ [x\backslash\underline{\alpha}\cdot Y]$. On a $U' = b\bar{\gamma}\cdot U_1'$ et $V' = b\bar{\gamma}\cdot V_1'$. Donc $U_1' \overset{*}{\to} V_1'$. Plusieurs sous-cas se présentent selon la position de ξ dans V.

<u>Cas 3.1</u> : $\xi = (\varepsilon,[\ ]^b,V)$. Ce cas est identique au cas 1.

<u>Cas 3.2</u> : $\xi = (\varepsilon,\ b\bar{\gamma}\cdot A_1[\ ], V)$. On a $\xi' = (\varepsilon,\ b\bar{\gamma}\cdot A_1[\ ], V')$. Posons $\xi_1 = (\varepsilon,\ A_1[\ ], V_1)$ et $\xi_1' = (\varepsilon,\ A_1[\ ], V_1')$. Par récurrence $c(U_1',\ \xi_1') = (w_1,\ A_1[\ ], W_1\ [x\backslash\underline{\alpha}\cdot X])$ où $c(U_1,\xi_1) = (w_1,A_1[\ ], W_1)$. Donc, par 3.3.2, on a $c(U',\xi') = (b\bar{\gamma}w_1\ ,\ A[\ ],\ b\bar{\gamma}\cdot W_1\ [x\backslash\underline{\alpha}\cdot X])$ et $c(U,\xi) = (b\bar{\gamma}w_1\ ,\ A[\ ],\ b\bar{\gamma}\cdot W_1)$.

<u>Cas 3.3</u> : $\xi = (b\bar{\gamma}v_1\ ,\ A[\ ]\ V)$. On a $\xi' = (b\bar{\gamma}v_1\ ,\ A[\ ], V')$. Posons $\xi_1 = (v_1,\ A[\ ], V_1)$ et $\xi_1' = (v_1,\ A[\ ], V_1')$. Par récurrence et par 3.2.1 (et aussi II.1.3.1), on a le résultat désiré.

<u>Cas 4 :</u> $U = b\underline{\gamma}\cdot U_1$. Ce cas est analogue au précédent.

<u>Cas 5</u> : $U = (\lambda y.U_1)^b$. Ce cas est aussi analogue au cas 3.

Cas 6 : $U = (U_1\ U_2)^b$ et $V = (V_1\ V_2)^b$. Idem.

Cas 7 : $U = (U_1\ U_2)^b$ et $V = b\bar{\gamma}\cdot V_1$. Alors $U' = (U_1'\ U_2')^b$ et $V' = b\bar{\gamma}\cdot V_1'$ si $U_1' = U_1[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$, $U_2' = U_2[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ et $V_1' = V_1[x\backslash\underline{\alpha}\cdot Y]$. La réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ est donc de la forme :

$$U = (U_1\ U_2)^b \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} Z = ((\lambda y\cdot U_3)^{\gamma} U_2)^b \rightarrow T = b\bar{\gamma}\cdot U_3[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U_2] \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V = b\bar{\gamma}\cdot V_1$$

où $Fon(U_1) = (\lambda y\cdot U_3)^{\gamma}$. Par le lemme 4.2.1 , on a $Fon(U_1') = (\lambda y\cdot U_3')^{\gamma}$ si $U_3' = U_3[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ et la réduction $U' \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V'$ se met sous la forme :

$$U' = (U_1'\ U_2')^b \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} Z' = ((\lambda y\cdot U_3')^{\gamma} U_2')^b \rightarrow T' = b\bar{\gamma}\cdot U_3'[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U_2'] \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V' = b\bar{\gamma}\cdot V_1'$$

Remarquons que $T' = T[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ par II.1.3.2. On a plusieurs cas selon la position de ξ dans V.

Cas 7.1 : $\xi = (\varepsilon, [\ ]^b, V)$. Cas identique au cas 1.

Cas 7.2 : $\xi = (\varepsilon, b\bar{\gamma}\cdot A_1[\ ], V)$. On a $\xi' = (\varepsilon, b\bar{\gamma}\cdot A_1[\ ], V')$.

Par 3.3.7, on a $c(U,\xi) = c(T,\xi)$ et $c(U',\xi') = c(T',\xi')$. Par récurrence, on a $c(T',\xi') = (w, A[\ ], W[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X])$ et $c(T,\xi) = (w, A[\ ], W)$.

Cas 7.3 : $\xi = (b\bar{\gamma}v_1, A[\ ], V)$ et $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.3. On a donc $c(T,\xi) = (b\bar{\gamma}w_3\gamma_3\underline{\gamma}w_2, A[\ ], S)$ où (w_3, y^{γ_3}, U_3) est une occurrence libre de y dans U_3 et $S = b\bar{\gamma}\cdot C_3[\underline{\gamma}\cdot W_2, \underline{\gamma}\cdot U_2, \underline{\gamma}\cdot U_2, \dots \underline{\gamma}\cdot U_2]$ si $C_3[;]\in\mathcal{C}_e$ est le plus grand préfixe de U_3 ne contenant pas y libre dont le trou distingué correspond à l'occurrence (w_3, y^{γ_3}, U_3). Or, par récurrence, on a $c(T',\xi') = (b\bar{\gamma}w_3\gamma_3\underline{\gamma}\ w_2, A[\ ], S')$ où $S' = S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$. Or on peut toujours supposer $y \neq x$ et y non libre dans X par α-conversion. Donc $C_3'[;] = C_3[;][x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ est le plus grand préfixe de U_3' ne contenant pas y libre et dont le trou distingué correspond à l'occurrence $(w_3, y^{\gamma_3}, U_3')$. De plus $S' = b\bar{\gamma}\cdot C_3'[\underline{\gamma}\cdot W_2', \underline{\gamma}\cdot U_2', \underline{\gamma}\cdot U_2', \dots \underline{\gamma}\cdot U_2']$ si $W_2' = W_2[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$. Comme $gen(T',\xi') = gen(T',c(T',\xi'))$, on a $gen(Z',\xi') = gen(Z',gen(T',\xi')) \subset (b[2], U_2', Z')$. Donc l'expression de $c(U',\xi')$ est donnée par 3.4.3. D'où finalement
$c(U,\xi) = (b[2]w_2, A[\ ], (U_1W_2)^b)$
et $c(U',\xi') = (b[2]\ w_2, A[\ ], (U_1'\ W_2')^b)$.

<u>Cas 7.4</u> : $\xi = (b\bar{\gamma}v_1, A[\ ], V)$ et $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.5. On a donc $c(T,\xi) = (b\bar{\gamma}w_3, A[\ ], b\bar{\gamma}\cdot W_3[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U_2])$ et $U_3 \overset{*}{\to} W_3$. Par récurrence $c(T',\xi') = (b\bar{\gamma}w_3, A[\ ], W')$ où $W' = (b\bar{\gamma}\cdot W_3[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U_2])[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$.
Donc $W' = b\bar{\gamma}\cdot W'_3[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U'_2]$ par II.1.3.1 et II.1.3.2 si $W'_3 = W_3[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$. De plus $U'_3 \overset{*}{\to} W'_3$ par II.1.3.3. Or, comme W_3 contient le sous-contexte de coordonnées $(w_3, A[\ ], W_3)$ par 3.4.5 et comme W' contient $(b\bar{\gamma}w_3, A[\ ], W')$, il existe un sous-contexte de coordonnées $(w_3, A[\ ], W'_3)$. Plus précisément, si $C'_3[\ ]$, $D'_3[\ ] \in \mathcal{C}_e$ sont les plus grands préfixes de U'_3 et W'_3 ne contenant pas y libre, on a $c(T',\xi') \subset (b\bar{\gamma}, D'_3[\ ], W') = \eta$. Donc
$gen(T',\xi') = gen(T', c(T',\xi')) \subset gen(T',\eta) = (b\bar{\gamma}, C'_3[\ ], T')$. On en déduit que $c(U',\xi')$ est donné par 3.4.5, c'est-à-dire
$c(Z,\xi) = (b[1]\gamma[\lambda x]w_3, A[\ ], ((\lambda x\cdot W_3)^{\gamma}U_2)^b)$ et
$c(Z',\xi') = (b[1]\gamma[\lambda x]w_3, A[\ ], ((\lambda x\cdot W'_3)^{\gamma}U'_2)^b)$. Par récurrence, puisque $d(U, ((\lambda x\cdot W_3)^{\gamma}U_2)^b) < d(U,V)$ par le lemme 4.1.1, on a
$c(U,\xi) = (b[1]w_1, A[\ ], (W_1\ U_2)^b)$ et $c(U',\xi') = (b[1]w_1, A[\ ], (W'_1\ U'_2)^b)$ si $W'_1 = W_1[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$. □

<u>4.2.3. Lemme</u> : Si on a les hypothèses suivantes :

1) $U \overset{*}{\to} V$ et $X \overset{*}{\to} Y$, $X \overset{*}{\to} Y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $n \geqslant 0$

2) $U' = U[x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ et $V' = D[\underline{\alpha}\cdot Y, \underline{\alpha}\cdot Y_1, \underline{\alpha}\cdot Y_2, \ldots \underline{\alpha}\cdot Y_n]$ où $D[;]$ est le plus grand préfixe de V ne contenant pas x libre dont le trou distingué correspond à une occurrence (v, x^{ζ}, V).

3) $\xi = (v_1, A[\ ], Y)$ et $\xi' = (v\zeta\underline{\alpha}v_1, A[], V')$

4) $c(X,\xi) = (w, A[\ ], W)$

alors on a
$c(U',\xi') = (u\delta\underline{\alpha}w, A[\ ], C[\underline{\alpha}\cdot W, \underline{\alpha}\cdot X, \underline{\alpha}\cdot X, \ldots \underline{\alpha}\cdot X])$
où $C[;]$ est le plus grand préfixe de U ne contenant pas x libre dont le trou distingué correspond à une occurrence (u, x^{δ}, U) libre de x dans U.

Démonstration : analogue à la précédente et donc par récurrence sur $<d(U,V),||U||>$. On a donc $U' \overset{*}{\to} V'$ et on suppose encore $b \in E_o$ et $\beta, \gamma \in E$.

Cas 1 : $U = x^b$. Alors $U = V$ et $U' = b\underline{\alpha}\cdot X \to V' = b\underline{\alpha}\cdot Y$. On a donc $\xi' = (b\underline{\alpha}v,\ A[\ ],\ V')$ et, par 3.2.1, on a $c(U',\xi') = (b\underline{\alpha}w,\ A[\ ],\ b\underline{\alpha}\cdot W)$ si $c(X,\xi) = (w,\ A[\ ],\ W)$.

Cas 2 : $U = y^b$. Ce cas est impossible.

Cas 3, 4, 5, 6 : On utilise 3.2.1 car les cas préfixes sont exclus puisque l'occurrence de x dans V est strictement contenue dans V.

Cas 7 : On reprend les notations de la démonstration précédente pour les réductions $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ et $U' \underset{st}{\overset{*}{\to}} V'$. Par récurrence, on a $c(T',\xi') = (t\theta\underline{\alpha}w,\ A[\ ],\ S')$ où $(t,\ x^\theta,\ T)$ est une occurrence libre de x dans T et $S' = E[\underline{\alpha}\cdot W,\ \underline{\alpha}\cdot X,\ \underline{\alpha}\cdot X, \ldots\ \underline{\alpha}\cdot X]$ et $E[\,;\,]$ est le plus grand préfixe de T ne contenant pas x libre dont le trou distingué correspond à l'occurence $(t,\ x^\theta,\ T)$. De plus, on a $c(X,\xi) = (w,\ A[\ ],\ W)$. Comme on peut toujours supposer $x \neq y$ et y non libre dans X par α-conversion, on peut poser $T = b\bar{\gamma}\cdot E_3[\vec{x}]\ [y\lambda\underline{\gamma}\cdot E_2[\vec{x}]\,] = E[\vec{x}]$. On peut également décomposer $E_3[\ ]$ et avec quelques abus de notations, on a $U_3 = E_3[\vec{x}] = E_4\ [\vec{y},\ \vec{x}]$ où ni x ou y ne sont libres dans $E_4[\ ]$. On a donc :

$$T = b\bar{\gamma}\cdot E_4\ [\overrightarrow{\underline{\gamma}\cdot E_2[\vec{x}]}\ ,\ \vec{x}]$$

$$T' = b\bar{\gamma}\cdot E_4\ [\overrightarrow{\underline{\gamma}\cdot E_2[\overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}]}\ ,\ \overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}]$$

Cas 7.1, 7.2 : Impossibles toujours car ξ' est strictement dans V'.

Cas 7.3 : $c(U',\xi')$ est donné par 3.4.3. On a donc $c(T',\xi') = (b\bar{\gamma}w_3\gamma_3\underline{\gamma}t_2\theta_2\underline{\alpha}w,\ A[\ ],\ S')$ où $(w_3,\ y^{\gamma_3},\ U_3')$ est une occurrence libre de y dans U_3' et

$$S' = b\bar{\gamma}\cdot E_4[\underline{\gamma}\cdot E_2[\underline{\alpha}\cdot W,\ \overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}],\ \overrightarrow{\underline{\gamma}\cdot E_2[\overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}]},\ \overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}]$$

De plus, on a $c(U',\xi') = (b[2]t_2\theta_2\underline{\alpha}w,\ A[\ ],\ (U_1'\ W_2')^b)$ où $W_2' = E_2[\underline{\alpha}\cdot W,\ \overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}]$ est la sous-expression de coordonnées $(b\bar{\gamma}w_3\gamma_3\underline{\gamma},\ W_2',\ S')$. Or comme $(t,\ x^\theta,\ T)$ est une occurrence libre de x, on a aussi $(t_2,\ x^{\theta_2},\ U_2)$ libre dans U_2.

Cas 7.4 : $c(U',\xi')$ est donné par 3.4.5. On a donc
$c(T',\xi') = (b\bar{\gamma}t_3\theta_3\underline{\alpha}w,\ A[\ ],\ S')$ où $S' = b\bar{\gamma}\cdot W_3'[y\backslash\underline{\gamma}\cdot U_2']$ et $U_3' \overset{*}{\rightarrow} W_3'$.
Pour se conformer à l'expression de S' déjà connue, on a

$$S' = b\bar{\gamma}\cdot E_4\ \overrightarrow{[\underline{\gamma}\cdot E_2\overrightarrow{[\underline{\alpha}\cdot X]}},\ \underline{\alpha}\cdot W,\ \overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}]$$

De plus, $c(Z',\xi') = \xi'' = (b[1]\gamma[\lambda y]t_3\theta_3\underline{\alpha}w,\ A[\ ],\ S'')$ où

$$\begin{aligned} S'' &= ((\lambda y\cdot E_4[\vec{y},\ \underline{\alpha}\cdot W,\ \overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}])^{\gamma}\ \ E_2[\overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}])^{b} \\ &= ((\lambda y\cdot E_3[\underline{\alpha}\cdot W,\ \overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}])^{\gamma}\ \ E_2[\overrightarrow{\underline{\alpha}\cdot X}])^{b} \end{aligned}$$

Comme $Z = ((\lambda y\cdot U_3)\ U_2)^{b}$ et $d(U,Z) < d(U,V)$, on a encore par récurrence $c(U',\xi') = c(U',\xi'')$ de la forme voulue. □

Corollaire : Si on a les hypothèses suivantes :

1) $U \overset{*}{\rightarrow} V$ et $X \overset{*}{\rightarrow} Y$,

2) $U' = U\ [x\backslash\underline{\alpha}\cdot X]$ et $V' = V\ [x\backslash\underline{\alpha}\cdot Y]$,

3) $\xi = (v_1, A[\ ], Y)$ et $\xi' = (v\zeta\underline{\alpha}\ v_1,\ A[\ ],\ V')$ où $(v,\ x^{\zeta},\ V)$ est une occurrence libre de x dans V,

alors on a :

1) $c(U',\xi') = (u\delta\underline{\alpha}w,\ A[\ ],\ W')$ où $(u,\ x^{\delta},\ U)$ est une occurrence libre de x dans U

2) $c(X,\xi) = (w,\ A[\ ],\ W)$ où W est la sous-expression de W' de coordonnées $(u\delta\underline{\alpha},\ W,\ W')$.

4.2.4. Proposition : Si on a

1) $U = ((\lambda x\cdot U_1)^{\beta}U_2)^{a} \overset{*}{\rightarrow} V = ((\lambda x\cdot V_1)^{\beta}V_2)^{a} \rightarrow V' = a\bar{\beta}\cdot V_1[x\backslash\underline{\beta}\cdot V_2]$ où $a\in E_o$ et $\beta\in E$,

2) $\xi \sqsubset V$ et $\xi' \sqsubset V'$ tels que $\xi \leqslant \xi'$,
alors on a $c(U,\xi) = c(U,\xi')$.

Démonstration : Raisonnons sur les positions possibles de ξ dans V, servons-nous de l'expression de $c(U,\xi)$ donnée dans la partie 3 et remarquons que $U \to U' = a\bar{\beta}\cdot U_1[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \xrightarrow[st]{*} V'$ est standard. D'autre part, comme $\xi \leqslant \xi'$, on n'a que trois cas possibles pour ξ dans V (voir la définition de résidu de 1.2.1).

Cas 1 : $\xi = (\varepsilon,[\ ]^a, V)$. Alors $\xi' = (\varepsilon,[\ ]^a, V')$ et on a trivialement $c(U,\xi) = c(U,\xi') = (\varepsilon,[\ ]^a, U)$ par 3.3.4.

Cas 2 : ξ est dans V_1, c'est-à-dire $\xi = (a[1]\beta[\lambda x]v_1, A[\ ], V)$.
Donc $\xi' = (a\bar{\beta}v_1\ , A[\ ], V')$. Posons $\xi_1 = (v_1, A[\ ], V_1)$. Par 3.2.1, on a
$c(U,\xi) = (a[1]\beta[\lambda x]w_1, A[\ ], ((\lambda x\cdot W_1)^{\beta}U_2)^a)$ si $c(U_1,\xi_1) = (w_1, A[\ ], W_1)$.
Par ailleurs, en fait par le lemme 4.2.2 et par 3.2.1., on a
$c(U',\xi') = (a\bar{\beta}w_1\ , A[\ ], a\bar{\beta}\cdot W_1[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2])$. On applique à présent 3.4.5 puisqu'on a clairement
$gen(U',\xi') = gen(U', c(U',\xi')) \subset (a\bar{\beta}, C_1[\ ], U')$ où $C_1[\ ]$ est le plus grand préfixe de U_1 ne contenant pas x libre. Donc 3.4.5 donne
$c(U',\xi') = (a\bar{\beta}w_1'\ , A[\ ], a\bar{\beta}\cdot W_1'[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2])$. On a donc $w_1' = w_1$ et $W_1 = W_1'$ par 3.4.4.
De plus, la proposition 3.4.5 implique
$c(U,\xi') = (a[1]\beta[\lambda x]w_1, A[\ ], ((\lambda x\cdot W_1)^{\beta}U_2)^a) = c(U,\xi)$.

Cas 3 : ξ est dans V_2, c'est-à-dire $\xi = (a[2]v_2, A[\ ], V)$. Donc
$\xi' = (a\bar{\beta}v_1\gamma_1\underline{\beta}v_2, A[\ ], V')$ où (v_1, x^{γ_1}, V_1) est une occurrence libre de x dans V_1. Posons $\xi_2 = (v_2, A[\ ], V_2)$. Par 3.2.1, on a
$c(U,\xi) = (a[2]w_2, A[\ ], ((\lambda x\cdot U_1)^{\beta}W_2)^a)$ si $c(U_2, \xi_2) = (w_2, A[\ ], W_2)$.
Par 3.2.1 et le lemme 4.2.3 (corollaire), on a
$c(U',\xi') = (a\bar{\beta}u_1\gamma_1\underline{\beta}\ w_2, A[\ ], W')$ où (u_1, x^{γ_1}, U_1) est une occurrence libre de x dans U_1 et W_2 est la sous-expression de W' de coordonnées $(a\bar{\beta}u_1\gamma_1\underline{\beta}, W_2, W')$. On applique à présent 3.4.3 puisqu'on a clairement
$gen(U',\xi') = gen(U', c(U',\xi')) \sqsubseteq (a\bar{\beta}u_1\gamma_1\underline{\beta}, U_2, U')$
$c(U,\xi') = (a[2]w_2, A[\ ], ((\lambda x\cdot U_1)^{\beta}W_2)^a) = c(U,\xi)$. □

4.2.5. Théorème : Si $U \xrightarrow{*} V$ et $U \xrightarrow{*} W$ et si $\xi \subset V$ et $\xi' \subset W$, alors on a $\xi \underset{U}{\sim} \xi'$ ssi $c(U,\xi) = c(U,\xi')$.

Démonstration : D'abord, si $c(U,\xi) = c(U,\xi')$, alors on a $\xi \sim c(U,\xi) = c(U,\xi') \sim \xi'$ par le théorème 4.1.2. Réciproquement, il suffit de considérer le cas où $\xi \leqslant \xi'$, car on obtient le reste par transitivité. Raisonnons par récurrence sur $<d(V,W),\ d(U,W),\ \|U\|>$. Supposons aussi $a \in E_o$ et $\beta \in E$.

Cas 1 : $U = x^a$. Alors $U = V = W$ et $\xi = \xi'$. Donc $c(U,\xi) = c(U,\xi')$.

Cas 2 : $U = a\bar{\beta}\cdot U_1$. Alors $U \overset{*}{\to} V = a\bar{\beta}\cdot V_1 \overset{*}{\to} W = a\bar{\beta}\cdot W_1$. Donc $U_1 \overset{*}{\to} V_1 \overset{*}{\to} W_1$ et ce cas se traine par récurrence en utilisant 3.2.1 ou 3.3.

Cas 3 : $U = a\underline{\beta}\cdot U_1$. Idem.

Cas 4 : $U = (\lambda x\cdot U_1)^a$. Idem.

Cas 5 : $U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\to} V = (V_1V_2)^a \overset{*}{\to} W = (W_1W_2)^a$. On a donc $U_1 \overset{*}{\to} V_1 \overset{*}{\to} W_1$ et $U_2 \overset{*}{\to} V_2 \overset{*}{\to} W_2$. On a encore le même traitement que dans le cas 2.

Cas 6 : $U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\to} V = a\bar{\beta}\cdot V_1 \overset{*}{\to} W = a\bar{\beta}\cdot W_1$. On a donc $U \overset{*}{\to}_{st} V$ et $U \overset{*}{\to}_{st} W$ de la forme $U \overset{*}{\to}_{norm} X \overset{*}{\to}_{st} V$ et $U \overset{*}{\to}_{norm} X \overset{*}{\to}_{st} W$ où

$$U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\to}_{norm} ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^a \to a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] = X$$

et $Fon(U_1) = (\lambda x\cdot U_3)^\beta$. Or, par 3.1.3, on a $c(U,\xi) = c(U,\ c(X,\xi))$ et $c(U,\xi') = c(U,c(X,\xi'))$. Donc $d(X,W) < d(U,W)$, on a par récurrence $c(X,\xi) = c(X,\xi')$. Donc $c(U,\xi) = c(U,\xi')$.

Cas 7 : $U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\to} V = (V_1V_2)^a \overset{*}{\to} W = a\bar{\beta}\cdot W_1$. Les réductions $U \overset{*}{\to}_{st} W$ et $V \overset{*}{\to}_{st} W$ sont de la forme

$$U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\to}_{norm} X' = ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^a \to X = a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \overset{*}{\to}_{st} W = a\bar{\beta}\cdot W_1$$

$$V = (V_1V_2)^a \overset{*}{\to}_{norm} Y' = ((\lambda x\cdot V_3)^\beta V_2)^a \to Y = a\bar{\beta}\cdot V_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot V_2] \overset{*}{\to}_{st} W = a\bar{\beta}\cdot W_1$$

où $Fon(U_1) = (\lambda x\cdot U_3)^\beta$ et $Fon(V_1) = (\lambda x\cdot V_3)^\beta$. Par II.3.6.4, on a $U_3 \overset{*}{\to} V_3$ et $U_2 \overset{*}{\to} V_2$. Donc $X' \overset{*}{\to} Y'$ et $X \overset{*}{\to} Y$. Comme $\xi \leqslant \xi'$ et comme les résidus sont cohérents dans le λ-calcul étiqueté, il existe $\eta' \subset Y'$ et $\eta \subset Y$ tels que

$\xi \leqslant \eta' \leqslant \eta \leqslant \xi'$. Or $d(V,Y') < d(V,W)$ et $d(Y,W) < d(V,W)$. Donc on a par récurrence $c(U,\xi) = c(U,\eta')$ et $c(X',\eta) = c(X',\xi')$. Or $c(U,\xi') = c(U, c(X',\xi'))$ par 3.1.3 et $c(U,\eta') = c(U, c(X',\eta'))$ aussi par 3.1.3., puisque la réduction $U \underset{norm}{\overset{*}{\rightarrow}} X' \underset{st}{\rightarrow} Y'$ est standard. Or la proposition précédente donne $c(X',\eta) = c(X',\eta')$. Donc $c(U,\xi) = c(U,\xi')$. □

Ce théorème est intéressant pour plusieurs raisons. D'abord son énoncé intuitif est le suivant : deux sous-contextes sont dans une même famille ssi ils sont créés de la même manière. Ensuite, il montre que la relation "de même famille" est décidable. En effet, il suffit de tester si $c(U,\xi) = c(U,\xi')$ et la fonction c, quoique légèrement compliquée, est hautement effective. En outre, la terminologie "représentant canonique" est enfin justifiée. Mais c'est un point de vue plus technique que nous retiendrons. Nous venons en effet de subir une démonstration particulièrement compliquée par le nombre de cas qu'elle exige de considérer. Or nous n'avons jamais rencontré une telle difficulté jusqu'à présent. Cela provient d'une raison bien simple. Dans le chapitre II, nous avons déjà rencontré des propriétés d'invariance (par exemple le théorème des développements finis) que nous avons montrées simplement en utilisant le λ-calcul étiqueté. Et à la place d'une propriété de commutation, nous avions à montrer une certaine propriété d'unicité sur les étiquettes (voir II.1.8.5). Nous aurions pu adopter pour le théorème précédent la même technique, car ce théorème est un corollaire du théorème de caractérisation que nous verrons dans la partie 5. Cette partie 4.2 était donc inutile, mais nous avons tenu à la garder car elle est peut-être plus parlante que la démonstration de la partie 5. Avant de passer à ce paragraphe 5, nous montrons quelques propriétés supplémentaires du représentant canonique qui reposent sur le théorème précédent.

4.3. Propriétés supplémentaires du représentant canonique

4.3.1. Proposition : On a $\xi' = c(U,\xi)$ ssi $\xi' \underset{U}{\sim} \xi$, $\xi' \subset V$ et $d(U,V)$ minimum.

Démonstration : immédiate en reprenant l'expression de $c(U,\xi)$ donnée dans la partie 3. □

4.3.2. Lemme : Si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V \overset{*}{\underset{st}{\to}} W$ est une réduction standard et si $\xi \subset W$, $c(U,\xi) \subset X$ et $c(V,\xi) \subset Y$, alors $Y \overset{*}{\to} Max(V,X)$.

Démonstration : par récurrence sur $<d(U,W), ||U||>$. Nous rappelons que l'expression de Max est donnée en II.3.6.4 et nous utilisons l'expression de $c(U,\xi)$ donnée dans la partie 3. Nous supposons à nouveau $a \in E_o$ et $\beta \in E$.

Cas 1 : $U = x^a$. Alors $U = V = W = X = Y$ par 3.3.3.

Cas 2 : $U = a\bar{\beta}\cdot U_1$. Alors $V = a\bar{\beta}\cdot V_1$, $W = a\bar{\beta}\cdot W_1$ et $U_1 \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_1 \overset{*}{\underset{st}{\to}} W_1$ est standard. Ce cas se traite par récurrence, car on a $Max(a\bar{\beta}\cdot V_1, a\bar{\beta}\cdot X_1) = a\bar{\beta}\cdot Max(V_1,X_1)$ par 3.6.4, en utilisant les propositions 3.2.1 ou 3.3.

Cas 3 : $U = a\underline{\beta}\cdot U_1$. Idem

Cas 4 : $U = (\lambda x\cdot U_1)^a$. Idem

Cas 5 : $U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\underset{st}{\to}} V = (V_1V_2)^a \overset{*}{\underset{st}{\to}} W = (W_1W_2)^a$. Idem

Cas 6 : $U = (U_1U_2)^a$ et $W = a\bar{\beta}\cdot W_1$. Alors la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W$ se décompose en :

$$U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\underset{norm}{\to}} U'' = ((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}U_2)^a \to U' = a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \overset{*}{\underset{st}{\to}} W = a\bar{\beta}\cdot W_1$$

où $(\lambda x\cdot U_3)^{\beta} = Fon(U_1)$. Nous avons deux cas possibles pour **V**, soit V est entre U et U'', soit V est entre U' et W. Mais nous raisonnons d'abord sur les différents cas possibles pour exprimer $c(U,\xi)$ en posant $c(U',\xi) \subset X'$ et $c(U'',\xi) \subset X''$.

Cas 6.1 : $\xi = (\varepsilon, [\ ]^a, W)$. Alors $X = U$ et $Y = V$ par 3.3.3. Et on a trivialement $Y \overset{*}{\to} Y = Max(V,X) = Max(V,U) = V$.

Cas 6.2 : $c(U,\xi)$ est donné par 3.3.7 ou 3.4.2. Alors $c(U,\xi) = c(U',\xi)$. Si V est entre U et U", alors $c(V,\xi)$ est aussi donné par 3.3.7 ou 3.4.2. Donc $c(V,\xi) = c(U',\xi)$. On a donc $c(U,\xi) = c(V,\xi)$. D'où $X = Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V,X)$. Si V est entre U' et W, on peut appliquer la récurrence à $U' \underset{st}{\overset{*}{\to}} V \underset{st}{\overset{*}{\to}} W$ et on obtient $Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V,X') = \mathrm{Max}(V,X)$ puisque $X = X'$.

Cas 6.3 : $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.3. On a donc $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}w_2,\ A[\ ],\ X')$ où (w_3, x^{γ_3}, U_3) est une occurrence libre de x dans U_3 et $X' = a\bar{\beta}\cdot C_3\ [\underline{\beta}\cdot W_2, \underline{\beta}\cdot U_2, \underline{\beta}\cdot U_2, \ldots \underline{\beta}\cdot U_2]$ si $C_3[;]\in\mathcal{C}_e$ est le plus grand préfixe de U_3 ne contenant pas x libre dont le trou distingué correspond à l'occurrence (w_3, x^{γ_3}, U_3). De plus, on a $X = (U_1\ W_2)^a$ et $X'' = ((\lambda x\cdot U_3)^{\beta}W_2)^a$. Si V est entre U et U", alors $V = (V_1U_2)^a$ et $c(U,\xi)$ est aussi donné par 3.4.3 puisque cela ne dépend que de gen(U",ξ). Donc $Y = (V_1W_2)^a$. D'où, comme $U_1 \overset{*}{\to} V_1$ puisque $U \overset{*}{\to} V$, on a $X \overset{*}{\to} Y$ et $Y \overset{*}{\to} Y = \mathrm{Max}(V,X) = (V_1W_2)^a$ par II.3.6.4. Si V est entre U' et W, alors on a $Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V,X')$ par récurrence. Or on a $\mathrm{Max}(U',X) = a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot W_2]$ par II.3.6.4. Donc la forme de X' implique $X' \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(U',X)$. On a donc $Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V,\mathrm{Max}(U',X)) = \mathrm{Max}(V,X)$ puisque $U' \overset{*}{\to} V$.

Cas 6.4 : $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.5. On a donc $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3\ ,\ A[\ ],\ X')$ où $X' = a\bar{\beta}\cdot W_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2]$ et $U_3 \overset{*}{\to} W_3$. De plus $X'' = ((\lambda x\cdot W_3)^{\beta}U_2)^a$ et X est donné par l'équation $c(U,\xi) = c(U, c(U'',\xi))$. Si V est entre U et U", alors $c(V,\xi)$ est aussi donné par 3.4.5 puisque cela ne dépend que de gen(U",ξ). Donc $c(V,\xi) = c(V, c(U'',\xi))$. Or comme $U \underset{norm}{\overset{*}{\to}} V \underset{norm}{\overset{*}{\to}} U'' \underset{st}{\overset{*}{\to}} X''$ est standard et puisque $d(U,X'') < d(U,W)$ par 4.3.1, on a par récurrence $Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V,X)$. Si V est entre U' et W, alors on a $Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V,X')$. Or par II.3.6.4., on a $X' = \mathrm{Max}(U',X'')$. Comme $U' \overset{*}{\to} V$, on a $Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V, \mathrm{Max}(U',X'')) = \mathrm{Max}(V,X'')$. Et nous récurrons une nouvelle fois. En effet, on a $U \underset{norm}{\overset{*}{\to}} U'' \underset{st}{\overset{*}{\to}} X''$ standard et d'autre part $d(U,X'') < d(U,W)$ par 4.3.1. Donc, comme $c(U,\xi) = c(U, c(U'',\xi))$ et $c(U'', c(U'',\xi)) = c(U'',\xi)$ par 2.3.1 et 2.3.5, on a $X'' \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(U'',X)$ par récurrence. Finalement puisque $U'' \overset{*}{\to} V$, on a $Y \overset{*}{\to} \mathrm{Max}(V, \mathrm{Max}(U'',X)) = \mathrm{Max}(V,X)$.□

4.3.3. Proposition : Si on fait les hypothèses suivantes :

1) $U \overset{*}{\to} V$

2) $\xi \subset V$ et $c(U,\xi)\subset X$

3) $\xi' \subset \mathrm{Max}(V,X)$ tel que $\xi \leqslant \xi'$
alors on a $c(U,\xi) \leqslant \xi'$.

Démonstration : par récurrence sur $<d(U,V), ||U||>$. Nous utilisons encore les expressions de Max et $c(U,\xi)$ données en II.3.6.4 et dans la partie 3. Nous supposons $a \in E_o$ et $\beta \in E$.

Cas 1 : $U = x^a$. Alors $U = V = X = \mathrm{Max}(V,X)$ et $\xi = \xi' = c(U,\xi)$.

Cas 2 : $U = a\bar{\beta}\cdot U_1$. Alors $V = a\bar{\beta}\cdot V_1$ et $X = a\bar{\beta}\cdot X_1$ en utilisant les propositions 3.2.1 ou 3.3. On a donc $\mathrm{Max}(V,X) = a\bar{\beta}\cdot\mathrm{Max}(V_1,X_1)$ par II.3.6.4 et on obtient le résultat désiré par récurrence.

Cas 3 : $U = a\underline{\beta}\cdot U_1$. Idem

Cas 4 : $U = (\lambda x\cdot U_1)^a$. Idem

Cas 5 : $U = (U_1U_2)^a \overset{*}{\to} V = (V_1V_2)^a$. Idem

Cas 6 : $U = (U_1U_2)^a$ et $V = a\bar{\beta}\cdot V_1$. Alors la réduction $U \underset{st}{\overset{*}{\to}} V$ se met sous la forme :

$$U = (U_1U_2)^a \underset{norm}{\overset{*}{\to}} U'' = ((\lambda x\cdot U_3)^\beta U_2)^a \to U' = a\bar{\beta}\cdot U_3[x\backslash\underline{\beta}\cdot U_2] \underset{st}{\overset{*}{\to}} V = a\bar{\beta}\cdot V_1$$

où $(\lambda x\cdot U_3)^\beta = \mathrm{Fon}(U_1)$. Nous avons plusieurs cas selon l'expression de $c(U,\xi)$.

Cas 6.1 : $\xi = (\varepsilon, [\;]^a, V)$. Alors $X = U$ par 3.3.3 et donc $\mathrm{Max}(V,X) = V$. D'où $\xi = \xi'$ et $c(U,\xi) \leqslant \xi = \xi'$.

Cas 6.2 : $c(U,\xi)$ est donné par 3.3.7 ou 3.4.2. Alors $c(U,\xi) = c(U',\xi)$. Comme $d(U',V) < d(U,V)$, on a $c(U,\xi) \leqslant \xi'$ par récurrence.

Cas 6.3 : $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.3. On a donc $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}w_2, A[\;], X')$ où (w_3, x^{γ_3}, U_3) est une occurrence libre de x dans U_3 et $X' = a\bar{\beta}\cdot C_3[\underline{\beta}\cdot W_2, \underline{\beta}\cdot U_2, \underline{\beta}\cdot U_2, \ldots \underline{\beta}\cdot U_2]$si $C_3[;] \in \mathcal{C}_e$ est le plus grand préfixe de U_3 ne contenant pas x libre dont le trou distingué correspond à l'occurrence (w_3, x^{γ_3}, U_3). De plus, on a $X = (U_1 W_2)^{\bar{a}}$ et posons $X'' = ((\lambda x \cdot U_3)^{\beta} W_2)^{\bar{a}}$, $Y = a\bar{\beta} \cdot U_3[x \backslash \underline{\beta} \cdot W_2]$. Par définition, on a $Max(V,X) = Max(V,Y)$. Comme $X' \overset{*}{\to} Y$, on a $V \overset{*}{\to} Max(V,X') \overset{*}{\to} Max(V,X)$. Or on a $\xi \subset V$ et $\xi' \subset Max(V,X)$ tels que $\xi \leqslant \xi'$. Comme les résidus sont cohérents dans le λ-calcul étiqueté, il existe $\xi_1 \subset Max(V,X')$ tel que $\xi \leqslant \xi_1 \leqslant \xi'$. Par récurrence, comme $d(U',V) < d(U,V)$, on a $c(U',\xi) \leqslant \xi_1 \leqslant \xi'$. A nouveau par cohérence des résidus, comme $X' \overset{*}{\to} Y \overset{*}{\to} Max(V,X)$, il existe $\xi_2 \subset Y$ tel que $c(U',\xi) \leqslant \xi_2 \leqslant \xi'$. Or, en tenant compte des formes de X', Y et $c(U',\xi)$, on a exactement la valeur de ξ_2 donnée par $\xi_2 = (a\bar{\beta}w_3\gamma_3\underline{\beta}w_2, A[\ ], Y)$. De plus, par 3.4.3, on a $c(U,\xi) = (a[2]w_2, A[\ ], X)$. Donc $c(U,\xi) \leqslant \xi_2 \leqslant \xi'$.

<u>Cas 6.4</u> : $c(U,\xi)$ est donné par 3.4.5. On a donc $c(U',\xi) = (a\bar{\beta}w_3, A[\ ], X')$ où $X' = a\bar{\beta} \cdot W_3[x \backslash \underline{\beta} \cdot U_2]$ et $U_3 \overset{*}{\to} W_3$. De plus $c(U'',\xi) = (a[1]\beta[\lambda x]w_3, A[\ ], X'')$ où $X'' = ((\lambda x \cdot W_3)^{\beta} U_2)^{a}$ et $c(U,\xi) = c(U, c(U'',\xi))$. Or, par le lemme précédent, on a $X' \overset{*}{\to} Max(U',X)$. Donc $Max(V,X') \overset{*}{\to} Max(V,Max(U',X)) = Max(V,X)$ puisque $U' \overset{*}{\to} V$. Il existe donc une réduction $V \overset{*}{\to} Max(V,X') \overset{*}{\to} Max(V,X)$. Or on a $\xi \subset V$ et $\xi' \subset Max(V,X)$ tels que $\xi \leqslant \xi'$. Par cohérence des résidus, il existe $\xi_1 \subset Max(V,\xi')$ tel que $\xi \leqslant \xi_1 \leqslant \xi'$. Par récurrence, comme $d(U',V) < d(U,V)$, on a $c(U',\xi) \leqslant \xi_1 \leqslant \xi'$. Or les expressions de $c(U'',\xi)$ et $c(U'\xi)$ impliquent $c(U'',\xi) \leqslant c(U',\xi)$. En résumé, on a $c(U'',\xi) \leqslant \xi'$. Or toujours par le lemme précédent, on a $X'' \overset{*}{\to} Max(U'',X) \overset{*}{\to} Max(V,X)$ puisque $U'' \overset{*}{\to} V$. A nouveau par cohérence des résidus, il existe $\xi_2 \subset Max(U'',X)$ tel que $c(U'',\xi) \leqslant \xi_2 \leqslant \xi'$. Or, par 4.3.1. on a $d(U,X'') < d(U,V)$. Comme $U'' \overset{*}{\to} X'' \overset{*}{\to} Max(U'',X)$, on a $Max(U'',X) = Max(X'',X)$ et comme $c(U,\xi) = c(U, c(U'',\xi))$, on a par récurrence $c(U,\xi) \leqslant \xi_2$. Finalement, on obtient $c(U,\xi) \leqslant \xi_2 \leqslant \xi'$. (Les cas 6.3 et 6.4 sont résumés dans les figures suivantes). □

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "*"] \arrow[d, "*"'] & & X \arrow[d] \\
U'' \arrow[rr, "*"] \arrow[d] & & X'' \arrow[d] \\
U' \arrow[r, dash, "*"] \arrow[d, "*"'] & X' \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"'] & \mathrm{Max}\,(U',X)=Y \arrow[d, "*"'] \\
V \arrow[r, "*"] & \mathrm{Max}(V,X') \arrow[r, "*"] & \mathrm{Max}\,(V,X)
\end{tikzcd}$$

<u>Figure 1</u> : Le cas 6.3

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "*"] \arrow[d, "*"'] & & X \arrow[d, "*"'] \\
U'' \arrow[r, "*"] \arrow[d] & X'' \arrow[r, "*"] \arrow[d] & \mathrm{Max}(U'',X) = \mathrm{Max}(X'',X) \arrow[d] \\
U' \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"'] & X' \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"'] & \mathrm{Max}(U',X) \arrow[d, "*"'] \\
V \arrow[r, "*"] & \mathrm{Max}(V,X') \arrow[r, "*"] & \mathrm{Max}\,(V,X)
\end{tikzcd}$$

<u>Figure 2</u> : Le cas 6.4

4.3.4. Théorème : Si $U \overset{*}{\to} X \overset{*}{\to} V$, si $\xi \subset V$ et si $c(U,\xi) \subset X$, alors on a $c(U,\xi) \leqslant \xi$.

Démonstration : immédiate par la proposition précédente car on a $Max(X,V) = V$. □

Ainsi, dans les expressions qui se trouvent "sous" le représentant canonique d'une certaine famille de sous-contextes, "même famille" veut dire exactement résidu du sous-contexte canonique. Cette propriété généralise donc la proposition II.4.4.3 que nous avions rencontrée (pour les radicaux) dans le cas où l'élément canonique est dans l'expression initiale. Par ailleurs, le théorème précédent et la proposition précédente sont rigoureusement équivalents grâce au théorème 4.2.5. Si $U \overset{*}{\to} V$ et si $\xi \subset V$ et $c(U,\xi) \subset X$, on peut se demander s'il existe toujours un $\xi' \subset Max(V,X)$ tel que $\xi \leqslant \xi'$ et $c(U,\xi) \leqslant \xi'$. La réponse est négative. Il suffit de considérer le contre-exemple suivant que nous simplifions en supprimant les étiquettes et en soulignant ξ et $c(U,\xi)$. Posons $\Delta = \lambda x.xx$. Alors

$$\begin{tikzcd}
U = \Delta(\lambda y.(\lambda z.I)\ y\ a) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(\lambda y.(\lambda z.I)y\ a)\ (\lambda y.(\lambda z.I)y\ a) \arrow[d] \arrow[dr] & X = \Delta(\lambda y.\underline{Ia}) \arrow[d] \\
(\lambda z.I)\ (\lambda y.(\lambda z.I)\ y\ a)\ a \arrow[d] \arrow[dr] & (\lambda y.Ia)\ (\lambda y.Ia) \arrow[d] \\
V = (\lambda z.I)\ (\lambda y.\underline{Ia})a \arrow[dr] & I\ a \arrow[d] \\
 & I\ a = Max(V,X)
\end{tikzcd}$$

Mais la propriété est vraie dans le λI-calcul étiqueté. Nous ne la démontrerons pas ici. Nous venons donc de montrer que le représentant canonique d'une famille de sous-contextes est celui qui, dans la famille, est à une distance minimale de l'expression de départ (4.3.1). D'autre part il est capable d'engendrer par résidus tous les éléments de la famille qui se trouvent dans des expressions dérivables de celle qui le contient. Nous allons montrer qu'il existe un procédé simple de décision pour l'appartenance à une même famille. Mais, pour cela, nous devons rentrer plus en détail dans le mécanisme de formation des étiquettes du λ-calcul étiqueté.

5) CARACTERISATION DU λ-CALCUL ETIQUETE

Nous allons montrer que si INIT(U) est vrai, c'est-à-dire si toutes les étiquettes de U sont des lettres différentes deux à deux (voir II.1.8) et si $U \overset{*}{\to} V$ et $\xi = (v, A[\ ], V)$, alors on peut construire l'élément canonique $c(U,\xi)$ en ne connaissant que les expressions de U et de $A[\ ]$. Ainsi les étiquettes d'un sous-contexte contiennent l'histoire de la création. Pour faire cela, nous avons besoin de quelques lemmes sur le comportement des étiquettes le long d'une réduction standard et nous introduisons une nouvelle notion, la relation de descendants entre sous-expressions, que nous empruntons à Morris[28].

5.1. Descendants d'une sous-expression et réductions standards

5.1.1. Définition : Si $U \overset{R}{\to} V$ où le radical contracté $R = ((\lambda x\cdot S)^{\alpha}T)^{\beta}$ a pour coordonnées (v,R,U), les *descendants* dans V *d'une sous-expression* A de coordonnées (u,A,U) sont définis par :

1) Si A et R sont deux sous-expressions disjointes, la sous-expression (u,A,U) a pour descendant unique la sous-expression (u,A,V). (On est donc dans le cas où $u = w[i]u_1$ et $v = w[j]v_1$ avec $i, j \in \{1, 2\}$ et $i \neq j$).

2) Si A contient R, c'est-à-dire $uu_1 = v\beta'$, $\beta'b = \beta$ et $b = D(\beta)$, la sous-expression (u,A,U) a pour descendant unique la sous-expression (u,B,V).

3) Si A est contenu dans S, on a donc $u = v\beta[1]\alpha[\lambda x]u_1$ et la sous-expression (u,A,U) a pour descendant unique la sous-expression $(v\beta\bar{\alpha}u_1, B, V)$.

4) Si A est contenu dans T, c'est-à-dire $u = v\beta[2]u_1$, la sous-expression (u,A,U) a pour descendants toutes les sous-expressions $(v\beta\bar{\alpha}w_i\gamma_i\underline{\alpha}u_1, A, V)$ où (w_i, x^{γ_i}, S) sont les coordonnées des occurrences de la variable x libre dans S.

La notion de descendant n'est donc pas définie pour toute sous-expression (u,A,U). Mais toute sous-expression (v,B,V) est un descendant d'une sous-expression (unique) de U si $U \xrightarrow{R} V$. Nous dirons encore que (v,B,V) descend de (u,A,U). Cette définition n'est que l'adaptation au λ-calcul étiqueté de la notion de descendant de Morris[28]. Elle est toutefois plus précise, car nous savons faire la différence entre $(v,\beta\bar{\alpha}\cdot S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T], V)$ et $(v\beta\bar{\alpha}, S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T], V)$, entre $(v\beta\bar{\alpha}w,\gamma\underline{\alpha}\cdot T, V)$ et $(v\beta\bar{\alpha}w\gamma\underline{\alpha}, T, V)$!

5.1.2. Définition : Si $U \xrightarrow{*} V$, les descendants dans V d'une sous-expression de U sont obtenus par réflexivité et transitivité sur la longueur de la réduction $U \xrightarrow{*} V$ à partir de la définition précédente.

5.1.3. Proposition : La notion de descendant est cohérente dans le λ-calcul étiqueté. Précisément si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions de la forme $U \xrightarrow{*} V$, les descendants dans V d'une sous-expression (u,A,U) par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les mêmes.

Démonstration : évidente. Supposons INIT(U) vérifié et on peut toujours se ramener à ce cas. Si $U \xrightarrow{*} V$, alors une sous-expression (v,B,V) descend de la sous-expression (u,A,U) ssi $\tau(A) = G(\tau(B))$, ce qui ne dépend pas de la réduction entre U et V. □

Nous combinons à présent la notion de descendant avec la propriété des réductions standards vue en 2.3.4 et nous nous intéressons à la relation de descendance pour les sous-expressions qui sont à droite d'une réduction standard (voir 2.3.2).

5.1.4. Proposition : Si $U \underset{st}{\xrightarrow{*}} V \underset{st}{\xrightarrow{*}} W$ est une réduction standard, alors toute sous-expression à droite de $U \underset{st}{\xrightarrow{*}} W$ descend d'une sous-expression à droite de $U \underset{st}{\xrightarrow{*}} V$.

Démonstration : Il suffit de considérer le cas $U \underset{st}{\xrightarrow{*}} V \xrightarrow{R} W$. Soit A une sous-expression de W à droite de $U \underset{st}{\xrightarrow{*}} W$ et posons $R = ((\lambda x\cdot S)^{\alpha}T)^{\beta}$. La définition de descendant de 5.1.1 n'autorise que les cas 1, 3, 4 de cette définition. Soit B la sous-expression de V dont A descend. Dans chacun de ces cas, B est à droite (strictement) de la partie fonction de R. Donc, comme $U \xrightarrow{*} W$ est standard, la partie fonction de R et donc B est à droite de $U \underset{st}{\xrightarrow{*}} V$ par la proposition 2.3.4. □

Mais les sous-expressions à droite d'une réduction standard ont une forme particulière, car la notion de descendant préserve la liaison des variables.

<u>5.1.5. Définition</u> : Nous dirons que la sous-expression B de A *s'appuie sur l'expression* $(\lambda x\cdot A)^{\alpha}$ si B contient au moins une occurrence de la variable liée x.

<u>5.1.6. Lemme</u> : Si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$, si B s'appuie sur une sous-expression $(\lambda x\cdot A)^{a}$ de V à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ où $a \in E_o$ et si B a pour coordonnées (v,B,A), alors les sous-expressions $(\lambda x\cdot A)^{a}$ et B descendent de sous-expressions $(\lambda x\cdot A_1)^{a}$ et B_1 de U telles que B_1 s'appuie sur $(\lambda x\cdot A_1)^{a}$ et B_1 a pour coordonnées (v,B_1,A_1).

<u>Démonstration</u> : La proposition précédente indique qu'il suffit de considérer le cas où on a $U \overset{R}{\to} V$. Posons $R = ((\lambda y\cdot S)^{\beta}T)^{\gamma}$ et raisonnons selon les cas de la définition de descendant :

<u>Cas 1</u> : $(\lambda x\cdot A)^{a}$ et le contractum de R sont disjoints. Ce cas est trivial car $(\lambda x\cdot A)^{a} = (\lambda x\cdot A_1)^{a}$.

<u>Cas 2</u> : $(\lambda x\cdot A)^{a}$ contient strictement le contractum de R. Ce cas est impossible car $(\lambda x\cdot A)^{a}$ est à droite de ce dernier.

<u>Cas 3</u> : $(\lambda x\cdot A)^{a}$ est une sous-expression du contractum qui descend d'une sous-expression S_1 de S. On a donc $S_1[y\backslash\underline{\beta}\cdot T] = (\lambda x\cdot A)^{a}$. Comme $a \in E_o$, la définition de la substitution impose $S_1 = (\lambda x\cdot A_1)^{a}$. De plus, comme dans U les sous-expressions $(\lambda x\cdot A_1)^{a}$ et T sont disjointes, on peut toujours supposer x non libre dans T (par α-conversion). Or B qui s'appuie sur $(\lambda x\cdot A)^{a}$ est donc contenu dans $A = A_1[y\backslash\underline{\beta}\cdot T]$. La sous-expression B ne peut être dans une occurrence de T dans A, car alors x serait libre dans T. Donc il existe une sous-expression B_1 de A_1 de coordonnées (v,B_1,A_1) telle que $B = B_1[y\backslash\underline{\beta}\cdot T]$. Les coordonnées de B sont donc (v,B,A) et B descend de B_1. Par ailleurs, les occurrences de x libre dans B se trouvent dans B_1 car x n'est pas libre dans T et donc B_1 s'appuie sur $(\lambda x\cdot A_1)^{a}$.

Cas 4 : $(\lambda x \cdot A)^a$ est une sous-expression du contractum de R qui descend d'une sous-expression T_1 de T. Ce cas est trivial car $T_1 = (\lambda x \cdot A)^a = (\lambda x \cdot A_1)^a$. □

5.1.7. Notation : Si pour tout i, j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, on a x_i non libre dans V_j, la quantité $U[x_1 \backslash V_1][x_2 \backslash V_2] \ldots [x_n \backslash V_n]$ sera notée $U[x_1 \backslash V_1, x_2 \backslash V_2, \ldots x_n \backslash V_n]$.

Cette notation a un sens par II.1.3.2.

5.1.8. Proposition : Si $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$, si A est une sous-expression de V à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$, alors $A = B[x_1 \backslash \underline{\alpha}_1 \cdot C_1, x_2 \backslash \underline{\alpha}_2 \cdot C_2, \ldots x_n \backslash \underline{\alpha}_n \cdot C_n]$ où $n \geqslant 0$, où A descend de B de U et où, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $x_i \in \mathrm{VARLIB}(B)$ et l'expression B s'appuie sur une sous-expression $(\lambda x_i \cdot D_i)^{D(\alpha_i)}$ de U.

Démonstration : par récurrence sur d(U,V). Si d(U,V) = 0, alors n = 0 et A = B. Si d(U,V) > 0, la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ est de la forme $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1 \overset{R}{\rightarrow} V$ où $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$. Par 2.3.4., la partie fonction de R, soit $(\lambda x \cdot S)^a$ où $a = D(\alpha)$, est à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1$. On a plusieurs cas, comme A est à droite du contractum $S[x \backslash \underline{\alpha} \cdot T]$ de R dans V par hypothèse.

Cas 1 : Le contractum de R est disjoint de A et donc A à droite de $S[x \backslash \underline{\alpha} \cdot T]$ se trouve tel quel dans V_1 à droite de R. Donc, la récurrence s'applique immédiatement sur A dans V, car A est à droite de R donc de $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1$.

Cas 2 : Le contractum de R contient A.

Cas 2.1 : A est dans une occurrence de T dans $S[x \backslash \underline{\alpha} \cdot T]$ et donc A descend de A dans T de $R = ((\lambda x \cdot S)^{\alpha} T)^{\beta}$ dans V_1. Donc A est à droite de la partie fonction de R, donc de $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1$ et la récurrence s'applique à A dans V_1.

Cas 2.2 : Il existe une sous-expression A_1 de S telle que $A = A_1[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T]$ et A descend de A_1 dans S de R dans V_1. On a deux cas selon que A_1 s'appuie ou non sur $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$.

Cas 2.2.1 : Si A_1 ne s'appuie pas sur $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$, on a donc x non libre dans A_1 et $A = A_1$. Or A_1 est dans S, donc à droite de $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$, donc à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1$ et par récurrence, on a le résultat voulu sur A.

Cas 2.2.2 : Si A_1 s'appuie sur $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$, on applique la récurrence à $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$ qui se trouve à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1$. On a donc $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)} = E[x_1\backslash\underline{\alpha}_1\cdot C_1,\ x_2\backslash\underline{\alpha}_2\cdot C_2,\ \ldots\ x_n\backslash\underline{\alpha}_n\cdot C_n]$ où $n \geqslant 0$, où $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$ descend de E dans U et où pour tout i, l'expression E s'appuie sur une sous-expression $(\lambda x_i\cdot D_i)^{D(\alpha i)}$ de U. La définition de la substitution et $D(\alpha) \in E_o$ imposent $E = (\lambda x\cdot S_1)^{D(\alpha)}$. Par le lemme, si (u,A_1,S) sont les coordonnées de A_1, l'expression A_1 descend de B dans U où B s'appuie sur $(\lambda x\cdot S_1)^{D(\alpha)}$ et a pour coordonnées (u,B,S_1). Donc comme (u,A_1,S) et (u,B,S_1) se correspondent, on a $A_1 = B[x_1\backslash\underline{\alpha}_1\cdot C_1,\ x_2\backslash\underline{\alpha}_2\cdot C_2,\ \ldots\ x_n\backslash\underline{\alpha}_n\cdot C_n]$. Or par α-conversion, on peut toujours supposer que x n'est pas libre dans les C_i et x_i non libres dans T pour tout i entre 1 et n. Donc comme $A = A_1[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T]$, on a, par le lemme II.1.3.2, $A = B[x_1\backslash\underline{\alpha}_1\cdot C_1,\ x_2\backslash\underline{\alpha}_2\cdot C_2,\ \ldots\ x_n\backslash\underline{\alpha}_n\cdot C_n,\ x\backslash\underline{\alpha}\cdot T]$. Or comme $(\lambda x\cdot S_1)^{D(\alpha)}$ s'appuie pour tout i sur les $(\lambda x_i\cdot D_i)^{D(\alpha i)}$ et comme B s'appuie sur $(\lambda x\cdot S_1)^{D(\alpha)}$ dans U, il suffit de considérer le sous-ensemble des variables $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$ où B s'appuie sur $(\lambda x_i\cdot D_i)^{D(\alpha i)}$ pour obtenir le résultat voulu. □

5.2. Propriétés supplémentaires des sous-expressions à droite d'une réduction standard

Nous supposons que l'expression U de départ vérifie le prédicat INIT (voir II.1.8) et nous allons voir que la proposition précédente implique que les sous-expressions qui se trouvent à droite des réductions standards issues de U ont une forme tout à fait particulière. Mais pour cela, nous avons d'abord besoin de quelques notations.

5.2.1. Définition : Les *sous-contextes d'un contexte* sont définis par analogie aux sous-contextes d'une expression étiquetée. Et les coordonnées (u, A [ ], B[ ]) du sous-contexte A[ ] du contexte B[ ] sont obtenues par extension triviale de la définition 1.1.4.

5.2.2. Notation : Par analogie à 1.3.1, si A[ ] est un sous-contexte de B[ ] de coordonnées (u, A[ ], B[ ]), nous définissons la norme suivante $\|u\|_1$ par :

$$\|\varepsilon\|_1 = 0 \ , \quad \|\alpha\overline{\beta}\|_1 = \|\alpha\underline{\beta}\|_1 = \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1 + 1$$

$$\|\alpha[\lambda x]u\|_1 = \|\alpha[i]u\|_1 = \|\alpha\|_1 + \|u\|_1 \quad \text{pour } i \in \{1,2\}$$

La quantité $\|u\|_1$ représente donc le nombre de soulignements et surlignements contenus dans u.

5.2.3. Notation : Nous notons par f(α, A [ ]) le plus grand préfixe de A[ ] qui ne contient pas de sous-contexte de coordonnées (u, b$\underline{\alpha}$•B[ ], A[ ]) où $\|u\|_1 = 0$ et b∈E_o.

Si B[ ]= f(α,A[ ]), on a donc B[ ] tel que A[ ]= B[$\underline{\alpha}$•B_1[ ] , $\underline{\alpha}$•B_2[ ] , ...$\underline{\alpha}$•B_n[ ] ;] où n ⩾ 0. Remarquons que l'on peut avoir n = 0. Dans ce cas, on a f(α,A[ ]) = A[ ] et A[ ] ne contient pas de sous-contextes de coordonnées (u, b$\underline{\alpha}$• B[ ], A[ ]) où $\|u\|_1 = 0$ et b∈E_o. On résume graphiquement ces notations de la manière suivante :

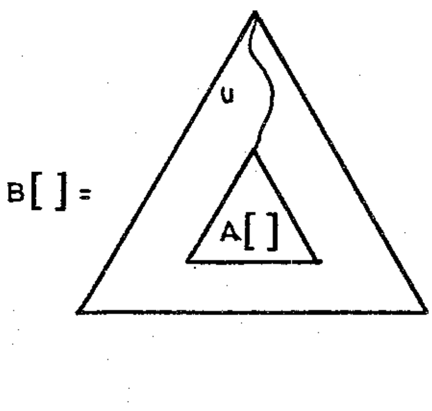


Figure 1 : A[ ] est le sous-contexte de B[ ] de coordonnées (u, A[ ], B[ ])

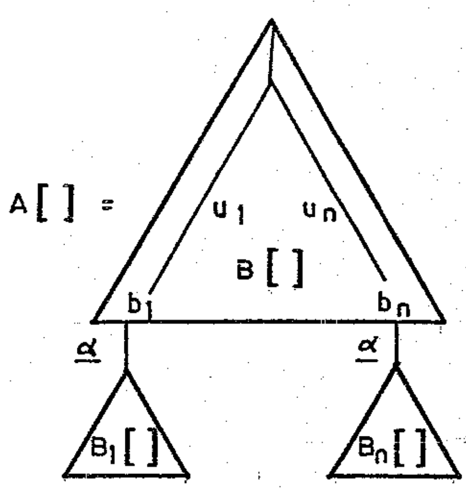


Figure 2 : On a $\|u_1\|_1 = \ldots = \|u_n\|_1 = 0$, $b_1, \ldots b_n \in E_o$ et B[ ] = f(α, A[ ])

5.2.4. Lemme : Si INIT(U) est vrai, si $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V_1 \overset{R}{\rightarrow} V$ est une réduction standard et si $R = ((\lambda x.S)^{\alpha}T)^{\beta}$, alors

1) $f(\alpha, S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T])$ est le plus grand préfixe de S ne contenant pas x libre.

2) si $\alpha \neq \gamma$ et si $f(\gamma, S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T]) \neq S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T]$, alors $D(\gamma) \neq D(\alpha)$ et la sous-expression $(\lambda x_o\cdot S_o)^{D(\alpha)}$ de U est contenue strictement dans la sous-expression $(\lambda x'\cdot S')^{D(\gamma)}$ de U.

Démonstration : en appliquant 5.1.8. Comme $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V_1 \overset{R}{\rightarrow} V$ est standard, la partie fonction $(\lambda x\cdot S)^a$ de R est telle que $a = D(\alpha)$ et est à droite de $U \underset{st}{\overset{*}{\rightarrow}} V_1$. On a donc $(\lambda x\cdot S)^a = B[x_1\backslash\underline{\alpha}_1\cdot C_1, x_2\backslash\underline{\alpha}_2\cdot C_2, \ldots x_n\backslash\underline{\alpha}_n\cdot C_n]$ où $(\lambda x\cdot S)^a$ descend de B et, pour tout i, la variable x_i est une des variables libres de B et B s'appuie sur des sous-expressions $(\lambda x_i\cdot S_i)^{D(\alpha_i)}$ de U. Donc, par définition de la substitution, on a $B = (\lambda x\cdot S_o)^a$ puisque $a \in E_o$. Donc $(\lambda x\cdot S)^a = (\lambda x\cdot S_o)^a [x_1\backslash\underline{\alpha}_1\cdot C_1, x_2\backslash\underline{\alpha}_2\cdot C_2, \ldots x_n\backslash\underline{\alpha}_n\cdot C_n]$. Donc toutes les occurrences de la variable liée x sont donc dans S_o et, comme INIT(U) est vrai, toutes les occurrences de la variable x libre de S sont de la forme (u, x^b, S) où $\|u\|_1 = 0$ et $b \in E_o$. Par ailleurs, toujours comme INIT(U) est vrai, et comme $(\lambda x_i\cdot S_i)^{D(\alpha_i)}$ contient strictement $(\lambda x\cdot S)^a$ dans U, on a $D(\alpha_i) \neq D(\alpha)$ et donc $\alpha_i \neq \alpha$. D'où $f(\alpha,[S\backslash x\cdot\underline{\alpha}\cdot T]$ est le plus grand préfixe de S ne contenant pas x libre. D'autre part, si $\alpha \neq \gamma$ et $f(\gamma, S[x\backslash\underline{\alpha}\cdot T]) \neq S[x\backslash\underline{\alpha}.T]$, on a $\gamma = \alpha_i$ pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc $D(\gamma) \neq D(\alpha)$ et la sous-expression $X = (\lambda x_i\cdot S_i)^{D(\alpha_i)}$ de U telle que $\tau(X) = D(\alpha_i) = D(\gamma)$ contient strictement la sous-expression $Y = (\lambda x\cdot S_o)^a$ telle que $\tau(Y) = a$. □

5.3. Théorème de caractérisation du λ-calcul étiqueté

5.3.1. Notation : Nous définissons les normes suivantes sur les étiquettes et les contextes étiquetés :

$$\begin{cases} \|a\|_2 = 0 & \text{si } a \in E_o \text{ et } \alpha, \beta, \gamma \in E \\ \|\alpha\overline{\beta}\gamma\|_2 = 1 + \|\alpha\|_2 + \|\gamma\|_2 & \\ \|\alpha\underline{\beta}\gamma\|_2 = \|\alpha\|_2 + \|\gamma\|_2 & \end{cases}$$

$$\|[\ ]^{\alpha}\|_2 = \|x^{\alpha}\|_2 = \|\alpha\|_2$$

$$\|(\lambda x\cdot A[\ ])^{\alpha}\|_2 = \|\alpha\|_2 + \|A[\ ]\|_2$$

$$\|(A[\ ]B[\ ])^{\alpha}\|_2 = \|\alpha\|_2 + \|A[\ ]\|_2 + \|B[\ ]\|_2$$

Donc $\|A[\ ]\|_2$ est le nombre de surlignements de "premier niveau" dans A .

<u>5.3.2. Définition</u> : <u>*Le contractum le plus à droite d'un contexte*</u> A[] est son sous-contexte B[] le plus à droite tel que $A[] = A_1[\bar{\alpha}\cdot B[]\ ;]$. Plus précisément, si C[] est un autre sous-contexte de A[] tel que $A[] = A_2[\bar{\beta}\cdot C[]\ ;]$ et si $(u_1\bar{\alpha}, B[], A[])$ et $(u_2\bar{\beta}, C[], A[])$ sont les coordonnées de B[] et C[] , on n'a pas $u_2\bar{\beta} = u_1\bar{\alpha}v\bar{\beta}$ ou u_1 et u_2 tels que $u_1\bar{\alpha} = v[1]u_1'\bar{\alpha}$ et $u_2\bar{\beta} = v[2]u_2'\bar{\beta}$.

<u>5.3.3. Notation</u> : Si INIT(U), si $U \xrightarrow{*} V$ et si A[] est un sous-contexte de V, nous définissons g(U, A[]) de la manière (un peu technique) suivante :

1) si $\|A[]\|_2 > 0$, alors A[] a un contractum plus à droite C'[] tel que $A[] = B[\bar{\alpha}\cdot C'[]\ ;]$ et on pose

$$g(U,A[]) = B[(\lambda x\cdot C[x, x, \ldots x;])^{\alpha}\ D[];]$$

où $C[] = f(\alpha, C'[])$, où $C'[] = C[\underline{\alpha}\cdot D_1[], \underline{\alpha}\cdot D_2[], \ldots \underline{\alpha}\cdot D_n[]\ ;]$, où $n\geq 0$,

où $D[] = (\bigcup_{i=1}^{n} D_i[])\cup[]^{d}$ si $(XY)^b$ est la sous-expression de U telle que $\tau(X) = G(\alpha)$ et $\tau(Y) = d$,

2) si $\|A[]\|_2 = 0$ et $\|A[]\|_1 > 0$, si α correspond à la sous-expression $(\lambda x\cdot S)^{D(\alpha)}$ la plus interne de U telle que $f(\alpha, A[]) \neq A[]$, alors on pose

$$g(U,A[]) = ((\lambda x\cdot\{u,S\}\ [C[x,x, \ldots x;];])^{\alpha}\ D[])^{b}$$

où $C[] = f(\alpha, A[])$, où $A[] = C[\underline{\alpha}\cdot D_1[], \underline{\alpha}\cdot D_2[], \ldots \underline{\alpha}\cdot D_n[]\ ;]$, où $n\geq 1$,

où $D[] = \bigcup_{i=1}^{n} D_i[]$, où u est tel qu'il existe une sous-expression Z de S de coordonnées (u,Z,S) vérifiant $\tau(Z) = G(\tau(A[\ ]))$, et où $(XY)^b$ est la sous-expression de U telle que $\tau(X) = G(\alpha)$.

Dans les deux cas, un sous-contexte $((\lambda x \cdot A_1[\ ])^\alpha A_2[\ ])^b = R[\ ]$ où $b \in E_o$ apparaît dans le contexte $g(U, A[\ ])$. Nous noterons ses coordonnées par $(r(U,A[\ ]), R[\ ], g(U,A[\ ]))$. De plus, nous notons $d(U,A[\ ]) = \varepsilon$ dans le cas 1 et $d(U,A[\ ]) = b\bar{\alpha}u$ dans le cas 2. Ceci nous permettra d'introduire une quantité $\Delta\xi = (d(U,A[\ ]), A[\ ], \langle r(U,A[\ ])\rangle)$ au sens des notations de 2.2.

Remarquons en outre que $g(U, A[\ ])$, $d(U, A[\ ])$ et $r(U, A[\ ])$ ne sont définis que si $\|A[\ ]\|_1 > 0$. Par ailleurs, on a toujours $\|g(U, A[\ ])\|_1 < \|A[\ ]\|_1$. Nous sommes à présent prêts à démontrer que, U et $A[\ ]$ étant donnés, on peut construire sans ambiguité une réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ génératrice de $A[\ ]$.

<u>5.3.4. Lemme</u> : Si INIT(U) est vrai et si $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1 \rightarrow V$ est une réduction standard, la réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ génère le sous-contexte de coordonnées $\xi = (v, A[\ ], V)$ ssi $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1$ génère le sous-contexte de coordonnées $\xi_1 = (v_1, g(U,A[\ ]), V_1)$, et $\xi - \xi_1 = (d(U, A[\ ]), A[\ ], \langle r(U, A[\ ])\rangle)$.

<u>Démonstration</u> : Un sens est évident par la définition de générateur strict de 2.1.1. Réciproquement, supposons que $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V_1 \overset{R}{\rightarrow} V$ génère le sous-contexte $\xi = (v, A[\ ], V)$. Nous raisonnons sur les deux cas de la définition 2.1.1. Soient $\xi_1 = (v_1, A_1[\ ], V_1)$ les coordonnées du générateur strict de ξ. Posons $R = ((\lambda x \cdot S)^\alpha T)^b$ où $b \in E_o$ (et on peut toujours le supposer sans perdre de la généralité - voir 1.1.4) et soient (w,R,V_1) les coordonnées de R.

<u>Cas 1</u> : $A[\ ] = B[\bar{\alpha} \cdot C[\underline{\alpha} \cdot D_1[\ ], \underline{\alpha} \cdot D_2[\ ], \ldots \underline{\alpha} \cdot D_n[\ ];];]$ où $n \geq 0$ et $C[\ ]$ a comme coordonnées $(wb\bar{\alpha}, C[\ ], V)$. On a alors $v = v_1$ et $A_1[\ ] = B[(\lambda x \cdot C[x,x,\ldots x;])^\alpha D[\ ];$ où les coordonnées des $D_i[\ ]$ sont $(wb\bar{\alpha}w_i\gamma_i\underline{\alpha}, D_i[\ ], V)$ et (w_i, x^{γ_i}, S) sont des occurrences de la variable libre x de S. De plus $D[\ ] = [\ ]^d \cup (\bigcup_{i=1}^{n} D_i[\ ])$ si $d = G(\tau(T))$.

On se demande donc si $A_1[\ ] = g(U, A[\ ])$. Posons $C'[\ ] = C[\underline{\alpha}\cdot D_1[\ ], \underline{\alpha}\cdot D_2[\ ], \ldots \underline{\alpha}\cdot D_n[\ ];]$ et on a $A[\ ] = B[\bar{\alpha}\cdot C'[\ ];\ ]$. Donc $||A[\ ]||_2 > 0$ et nous affirmons que $C'[\ ]$ est le contractum le plus à droite de $A[\ ]$. En effet, s'il existait un autre contractum plus à droite que $C'[\ ]$, comme $C'[\ ]$ est un préfixe du contractum de R dans V, il existerait une sous-expression W de V plus à droite que $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ telle que $\|W\|_2 > 0$. Or ceci est interdit par 5.1.8.

Nous sommes donc dans le premier cas de la définition 5.3.3. Par le lemme 5.2.4 (1ère partie), on a $C[\ ] = f(\alpha, C'[\ ])$. D'autre part, par 1.3.2., si $a = G(\alpha)$, le sous-contexte $([\ ]^a\ [\ ]^d)^b$ de V est un résidu d'un sous-contexte de U. Donc, comme INIT(U) est vrai, il existe une seule sous-expression $(XY)^b$ de U telle que $\tau(X) = a$ et $\tau(Y) = d$. On a donc $A_1[\ ] = g(U, A[\ ])$.

Par ailleurs, on a $v = v_1 = v_1 d(U,A[\ ])$ car on a $d(U,A[\ ]) = \varepsilon$ et $w = v_1 r(U,A[\ ])$. Donc $\xi - \xi_1 = (d(U,A[\ ]), A[\ ], \langle r(U,A[\ ])\rangle)$.

<u>Cas 2</u> : $A[\ ] = C[\underline{\alpha}\cdot D_1[\ ], \underline{\alpha}\cdot D_2[\ ], \ldots \underline{\alpha}\cdot D_n[\ ];$ où $n \geqslant 1$ et $v = wb\bar{\alpha}u$. On a alors $v_1 = w$ et $A_1[\ ] = ((\lambda x\cdot \{u,S\}[C[x,x,\ldots x;];]\ )^{\alpha}\ D[\ ])^b$ où les sous-contextes $D_i[\ ]$ ont comme coordonnées $(wb\bar{\alpha}w_i\gamma_i\underline{\alpha}, D_i[\ ], V)$ si (w_i, x^{γ_i}, S) sont des occurrences de la variable libre x de S et $D[\ ] = \bigcup_{i=1}^{n} D_i[\ ]$.

Le contexte $A[\ ]$ est préfixe d'une sous-expression du contractum de R dans V; donc cette sous-expression est à droite de $U \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} V$ et, par 5.1.8, on a $||A[\ ]||_2 = 0$. On est donc dans le deuxième cas de la définition de $g(U, A[\ ])$. Par ailleurs, comme $n \geqslant 1$, on a $||A[\ ]||_1 > 0$. Or, par 5.2.4 (1ère partie), on a $\|u||_1 = 0$ et $f(\alpha, A[\ ]) \neq A[\ ]$. Donc par 5.2.4 (2ème partie), l'étiquette α correspond à la sous-expression $(\lambda x\cdot S')^{D(\alpha)}$ de U la plus interne telle que $f(\alpha, A[\ ]) \neq A[\ ]$. Or, par 5.2.4., on a $C[\ ] = f(\alpha, A[\ ])$. De plus, comme dans le cas précédent, il existe une seule sous-expression de U de la forme $(XY)^b$ si $\tau(X) = G(\alpha)$.

Enfin, comme $||u||_1 = 0$, si $S_o[\ ]$ est le plus grand préfixe de S tel que $||S_o[\ ]||_1 = 0$, il existe un sous-contexte de coordonnées $(u, Z_o[\ ], S_o[\ ])$ tel que $G(\tau(Z_o[\ ])) = G(\tau(A[\ ]))$. On a donc dans V_1 un sous-contexte $F_o[\ ] = (\lambda x \cdot S_o[\ ])^{D(\alpha)}$ tel que $||F_o[\ ]||_1 = 0$. Par 1.3.2, le sous-contexte $F_o[\ ]$ existe dans $\mathbb{U}$. Donc, il existe dans U une sous-expression de coordonnées (u,Z,S') telle que $\tau(Z) = G(\tau(A[\ ]))$ et on a $\{u,S'\}[C[\ ];] = \{u,S\}[C[\ ];]$.

Finalement, on a $v = v_1 d(U,A[\ ]) = v_1 \overline{b\alpha u}$ et $w = v_1 r(U,A[\ ])$ Donc $\xi - \xi_1 = (d(U, A[\ ]), A[\ ],<r(U,A[\ ])>)$. □

5.3.5. Proposition : Si INIT(U) est vrai et si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V$ et $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W$ sont deux réductions génératrices des sous-contextes de coordonnées $\xi = (v,A[\ ],V)$ et $\xi' = (w,A[\ ], W)$, alors $\xi = \xi'$.

Démonstration : immédiate par la proposition précédente. On raisonne par récurrence sur $||A[\ ]||_1$. Si $||A[\ ]||_1 = 0$, alors la réduction génératrice de $A[\ ]$ est vide par 1.3.2 et les coordonnées de $A[\ ]$ dans U sont déterminées sans ambiguité puisque INIT(U) est vrai. Si $||A[\ ]||_1 \neq 0$, alors on a une réduction génératrice unique de $g(U, A[\ ])$ par récurrence, et, si $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_1$ est cette réduction, les coordonnées ξ_1 de $g(U,A[\ ])$ dans V_1 sont fixées sans ambiguité par récurrence. Or le lemme précédent implique que seul $\xi = \xi_1 + (d(U,A[\ ]), A[\ ]\ , <r(U,A[\ ])>)$ peut être généré par une réduction $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V_1 \to V$ qui est donc maintenant fixée. □

5.3.6. Théorème : Si INIT(U) est vrai, si $U \overset{*}{\to} V$ et $U \overset{*}{\to} W$ et si $\xi = (v,A[\ ],V)$ et $\xi' = (w,B[\ ],W)$, alors on a :

$$\xi \underset{U}{\sim} \xi' \quad \text{ssi} \quad A[\ ] = B[\ ]$$

Démonstration : Si $\xi \sim \xi'$, on a $A[\ ] = B[\ ]$ par 1.4.2. Or, par le théorème 4.1.2, on a $c(U,\xi) \underset{U}{\sim} \xi$ et $c(U,\xi') \underset{U}{\sim} \xi'$. Donc, toujours par 1.4.2, on a $c(U,\xi) = (v', A[\ ], V')$ et $c(U,\xi') = (w', A[\ ], W')$. Or, par 2.3.5, les réductions $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} V'$ et $U \overset{*}{\underset{st}{\to}} W'$ génèrent $c(U,\xi)$ et $c(U,\xi')$. Donc, par 5.3.5, comme INIT(U) est vrai, on a $c(U,\xi) = c(U,\xi')$. Donc $\xi \underset{U}{\sim} \xi'$. □

Remarquons que nous n'avons pas utilisé le théorème 4.2.5 dans la démonstration précédente. On aurait pu le faire et la démonstration aurait été légèrement plus simple. Mais, il faut surtout remarquer que nous avons aussi démontré le théorème 4.2.5 dans le cas où INIT(U) est vrai, ce qui est suffisant pour le cas général en considérant des expressions et réductions isomorphes issues d'une expression isomorphe vérifiant le prédicat INIT.

Nous venons donc de démontrer que la notion de famille correspond donc exactement à l'égalité des étiquettes d'un sous-contexte, dans le cas où l'expression étiquetée initiale porte des étiquettes toutes différentes de E_o.

6) PROPRIETES SUPPLEMENTAIRES DES FAMILLES DE RADICAUX

Nous appliquons aux familles de radicaux, en utilisant la proposition 1.4.3, les propositions et théorèmes 4.1.2, 4.2.5, 4.3.1, 4.3.4 et 5.3.6. Nous revenons donc dans le λ-calcul non étiqueté et nous utilisons les notations de II.4.

6.1. Notation : La longueur de la réduction $\mathcal{D}$ est notée $|\mathcal{D}|$.

6.2. Définition : *Le représentant canonique de la famille de radicaux* contenant $(R,\mathcal{D})$ est la paire $(R_o,\mathcal{D}_o)$ telle que $\mathcal{D}_o$ est standard et $|\mathcal{D}_o|$ minimum telle que $(R_o,\mathcal{D}_o) \sim (R,\mathcal{D})$.

Cette définition a un sens en utilisant 1.4.3 et 4.3.1. En outre, la réduction $\mathcal{D}_o$ génère (dans un sens intuitif) le radical R_o puisque cette définition correspond à la définition de représentant canonique de sous-contexte étiqueté. Nous *noterons* $(R,\mathcal{D})_o$ le représentant canonique de la famille de $(R,\mathcal{D})$. Le théorème 4.2.5 se traduit donc simplement par $(R,\mathcal{D}) \sim (R',\mathcal{D}')$ ssi $(R,\mathcal{D})_o = (R',\mathcal{D}')_o$ avec notre nouvelle définition.

6.3. Théorème : Si $(R,\mathcal{D})_o = (R_o,\mathcal{D}_o)$, on a $\mathcal{D}_o \leqslant \mathcal{D}$ ssi $(R_o,\mathcal{D}_o) \leqslant (R,\mathcal{D})$.

Démonstration : D'abord, si $(R_o,\mathcal{D}_o) \leqslant (R,\mathcal{D})$, on a $\mathcal{D}_o \leqslant \mathcal{D}$ par II.4.2.3. Réciproquement, si $\mathcal{D}_o \leqslant \mathcal{D}$, on utilise II.4.3.4 et 1.4.3 et 4.3.4.$\square$

6.4. Théorème : Si $\mathcal{D},\mathcal{D}' \in \mathcal{R}(M)$ et si $\mathcal{D}_e$ et $\mathcal{D}'_e$ sont les deux réductions étiquetées isomorphes à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ issues de U tel que $\tau^{-1}(U) = M$ et si $(R_e,\mathcal{D}_e)$ et $(R'_e,\mathcal{D}'_e)$ sont isomorphes à $(R,\mathcal{D})$ et $(R',\mathcal{D})$, alors les trois clauses suivantes sont équivalentes :

1) $(R,\mathcal{D}) \sim (R',\mathcal{D}')$

2) degré (R_e) = degré (R'_e) quand INIT(U) est vrai

3) degré (R_e) = degré (R'_e) pour tout U tel que $\tau^{-1}(U) = M$

Démonstration : Les clauses 1 et 2 sont équivalentes par 1.4.3 et 5.3.6. Or la clause 2 est trivialement équivalente à la clause 3. □

Nous avons donc donné un sens à notre λ-calcul étiqueté. Le degré d'un radical caractérise donc sa famille. Et nous comprenons la technique de démonstration utilisant les prédicats bornés supérieurement dans le chapitre II. *Mettre des étiquettes et borner le prédicat S consistait donc à considérer des développements finis généralisés* (du moins quand le prédicat INIT est vérifié).

CHAPITRE IV

INTERPRETATIONS DU λ-CALCUL

Nous reprenons ce que nous avons fait dans [23,24] et nous essayons de relier ce travail à ce qui a été fait par ailleurs. Cette connexion est due à Hyland [19].

1) INTRODUCTION

Le problème est d'interpréter les λ-expressions, c'est-à-dire d'associer un objet mathématique à chaque λ-expression et de faire correspondre à l'application et à la λ-abstraction des opérations sur ces objets. Une telle définition peut être faite rigoureusement, en introduisant des λ-algèbres (voir Barendregt[3]). Nous évitons ce problème en utilisant la définition peu orthodoxe suivante.

1.1. Définition : Une relation *sémantique*, en abrégé une sémantique du λ-calcul, est une relation d'équivalence $\equiv$ vérifiant pour toutes λ-expressions M et N les deux propriétés suivantes :

1) Si $M \overset{*}{\rightarrow} N$, alors $M \equiv N$

2) Si $M \equiv N$, alors $C[M] \equiv C[N]$ pour tout contexte $C[\,]$.

Nous dirons qu'une fonction $\mathfrak{I}$ définie sur Λ est une *interprétation* des λ-expressions si la relation de Λ définie par $\mathfrak{I}(M) = \mathfrak{I}(N)$ est une sémantique. Remarquons que la relation d'interconvertibilité, c'est-à-dire la fermeture symétrique et transitive de la relation $\overset{*}{\rightarrow}$, est une sémantique particulière. Toute relation sémantique est donc, par définition, une relation d'équivalence compatible avec la relation d'interconvertibilité et compatible avec les lois de formation du langage Λ des λ-expressions.

Puisque nous ne raisonnons qu'en termes de relation d'équivalence, nous ne précisons guère les objets que l'on peut associer aux λ-expressions. Pourtant, l'interprétation intuitive du λ-calcul est une interprétation fonctionnelle. En effet, l'expression MN semble traduire l'application (au sens des fonctions) de M à N et l'expression $\lambda x{\cdot}M$ veut dire que l'on considère M comme fonction de x. Tout cela est rendu cohérent par la β-règle de conversion qui implique que $(\lambda x{\cdot}M)N$ et $M[x\backslash N]$ sont représentés par un même objet. Mais toute interprétation fonctionnelle se heurte d'abord à un problème de cardinalité due au paradoxe de l'auto-application. En effet, si $D \to E$ représente l'ensemble des fonctions de D dans E et si on veut interpréter la λ-expression xx, on aboutit à l'égalité $D = D \to E$, ce qui est impossible dès que card(D) > 1. Scott[37] fut le premier à donner une interprétation fonctionnelle du λ-calcul. De la même manière que l'ensemble des fonctions continues des réels dans les réels a la même cardinalité que l'ensemble des réels, Scott trouva une interprétation fonctionnelle où les seules fonctions considérées sont continues par rapport à une topologie très simple définie sur des domaines qui ont une structure de treillis. Nous ne décrirons pas ce domaine D_∞ ici, ni les autres modèles $P\omega$ et $T\omega$(voir Plotkin[32,35] et Scott [38]). Mais nous retenons ici - et c'est une indication fondamentale - que nous avons affaire à des treillis ou demi-treillis ou ordres partiels complets si on ordonne les domaines d'interprétation par la relation "moins défini que" et que les procédés de calculs sont des mécanismes continus. Et nous verrons que ces deux hypothèses sont naturelles et pas du tout contraignantes. Une telle approche qui consiste à associer des objets mathématiques ou fonctionnels est encore appelée sémantique dénotationnelle (voir Scott [39]). Cette discussion fait donc apparaître des relations d'ordre (partiel) et nous introduisons une nouvelle définition.

1.2. Définition : Une *sémantique monotone* (croissante) du λ-calcul est une relation de préordre $\sqsubseteq$ vérifiant :

1) Si $M \xrightarrow{*} N$, alors $M \equiv N$ (c'est à dire $M \sqsubseteq N \sqsubseteq M$)

2) Si $M \sqsubseteq N$, alors $C[M] \sqsubseteq C[N]$ pour tout contexte $C[\ ]$

Une autre manière de donner un sens aux λ-expressions est de considérer une sémantique opérationnelle. Et nous allons voir qu'il y a deux sortes de relations opérationnelles : les relations intensionnelles et les relations extensionnelles (voir Church [11]). La première manière ne considère que tous les calculs ou réductions d'une λ-expression et consiste à dire que M est plus petite que N ssi, pour toute expression dérivable de M, il existe une expression "plus précise" dérivable de N (voir Courcelle [12], Nivat [29], Vuillemin [43]pour les programmes récursifs ou Lévy [23], Welch [48]).

La seconde manière consiste à dire que deux λ-expressions sont opérationnellement équivalentes si elles ont "le même comportement" pour tout contexte dans lequel on les plonge. (Voir Barendregt [1], Hyland [19], Morris [28], Milner [26], Plotkin [34], Wadsworth [45], ...). Dans cette seconde alternative, on peut également introduire un préordre en transformant la relation "même comportement" en une relation "comportement plus précis". Pour arriver à faire des définitions plus rigoureuses, il faut d'abord s'entendre sur le sens de la relation "plus précis que".

<u>1.3. Définition</u> : Un <u>*critère de précision*</u> est une relation $\leq_{op}$ de préordre sur les λ-expressions qui est décidable et qui contient la relation $\overset{*}{\to}$.

Formellement, on a $\leq_{op}$ vérifiant pour tout $M, N, P \in \Lambda$:

1) $M \leq_{op} M$

2) si $M \leq_{op} N$ et $N \leq_{op} P$, alors $M \leq_{op} P$

3) si $M \overset{*}{\to} N$, alors $M \leq_{op} N$

Intuitivement, la précision d'une λ-expression augmente au fur et à mesure d'une réduction. De plus, la décidabilité du critère de précision interdit pratiquement que l'on fasse intervenir la relation d'interconvertibilité qui est indécibable (voir Barendregt [1]) et le critère de précision doit donc être simple. Les deux façons d'introduire des sémantiques opérationnelles peuvent être maintenant définies.

1.4. Définition : La *relation opérationnelle intentionnelle définie par le critère de précision* $\leq_{op}$ est la relation $\sqsubseteq_{op}$ définie pour toutes λ-expressions M et N par :

$$M \sqsubseteq_{op} N \text{ ssi } \forall M' \text{ tel que } M \overset{*}{\to} M', \exists N' \text{ tel que } N \overset{*}{\to} N' \text{ et } M' \leq_{op} N'$$

1.5. Définition : La *sémantique opérationnelle extensionnelle engendrée par le critère de précision* $\leq_{op}$ est la relation $\sqsubseteq_{op}$ définie pour toutes λ-expressions M et N par :

$$M \sqsubseteq_{op} N \text{ ssi } \forall C[\ ].\ C[M] \leq^{*}_{op} C[N]$$

où $\leq^{*}_{op}$ est la relation opérationnelle intensionnelle définie par $\leq_{op}$.

Nous réserverons le mot sémantique opérationnelle pour cette dernière définition, qui en fait celle que l'on attend de toute sémantique raisonnable. Nous rappelons que Church [11]utilise les mots extensionnels et intentionnels pour les fonctions et non pour les λ-expressions. C'est ce qui risque d'être à l'origine d'une confusion avec les définitions de sémantique extensionnelle figurant, par exemple, chez Barendregt [1]. En fait, il n'y a aucune ambiguïté car nous avons simplement parlé de sémantique opérationnelle extensionnelle. Une sémantique extensionnelle du λ-calcul est (conformément à [1]) une relation sémantique telle que si $MP \equiv NP$ pour tout P, alors $M \equiv N$. Ce principe d'extensionnalité est bien identique à celui qui régit habituellement l'égalité des fonctions et revient à valider la règle η de conversion du λ-calcul (voir chapitre I).

Nous pouvons à présent définir un corollaire immédiat des définitions précédentes.

1.6. Corollaire : Soient $\leq^*_{op}$ la relation opérationnelle intentionnelle définie par $\leq_{op}$ et $\sqsubseteq_{op}$ la sémantique opérationnelle extensionnelle engendrée par $\leq_{op}$. Alors

1) $\leq^*_{op}$ est un préordre

2) Si $M \overset{*}{\to} N$, alors $M \equiv^*_{op} N$ (c'est-à-dire $M \leq^*_{op} N \leq^*_{op} M$)

3) $\leq^*_{op}$ n'est pas en général une sémantique monotone

4) $\sqsubseteq_{op}$ est une sémantique monotone.

Démonstration :

1) trivial car $\leq_{op}$ est un préordre

2) On a d'abord $N \leq^*_{op} M$ car $\leq_{op}$ est réflexif. Si $M \overset{*}{\to} M'$, il existe N' tel que $N \overset{*}{\to} N'$ et $M' \overset{*}{\to} N'$ par le théorème de Church-Rosser. Comme $\leq_{op}$ contient $\overset{*}{\to}$, on a $M' \leq_{op} N'$. Et donc $M \leq^*_{op} N$.

3) Posons $I = \lambda x{\cdot}x$ et $K = \lambda xy{\cdot}x$. Soit $\leq_{op}$ la relation définie par $M \leq_{op} I$ pour tout M. Cette relation est un critère de précision et on a $K \leq_{op} I$ et on n'a pas $I \leq_{op} K$. Posons $C[\,] = [\,]\, IK$, on a $C[I] = IIK \overset{*}{\to} K$ et $C[K] = KIK \overset{*}{\to} I$. Donc $C[I] \equiv^*_{op} K$ et $C[K] \equiv^*_{op} I$. D'où $C[I] \leq^*_{op} C[K]$ et $C[I] \not\equiv^*_{op} C[K]$.

4) La relation $\sqsubseteq_{op}$ est un préordre, puisque $\leq^*_{op}$ l'est aussi. De plus, si $M \overset{*}{\to} N$, alors $M \equiv_{op} N$ puisque, pour tout $C[\;]$, on a $C[M] \overset{*}{\to} C[N]$ et donc $C[M] \equiv^*_{op} C[N]$. Enfin, si $M \sqsubseteq_{op} N$, on a $C[M] \sqsubseteq_{op} C[N]$ pour tout $C[\;]$, puisque tout contexte de $C[M]$ est en fait un contexte de M. □

Si on raisonne donc avec un point de vue opérationnel, le problème est de trouver un bon critère de précision et d'éviter que les relations extensionnelles ou intentionnelles dégénèrent. Nous dirons qu'une relation de préordre dégénère ou est incohérente si cette relation $\sqsubseteq$ est totale, c'est-à-dire si on a $M \sqsubseteq N$ pour tout M et N.

Nous n'allons pas découvrir ici de nouveaux critères de précision. Toutes ces relations existent dans la littérature (voir Barendregt [1], Hyland [19], Morris [28], Wadsworth [45]) et nous les citerons pour mémoire à la fin de ce chapitre. Nous rappelons d'abord deux phénomènes importants. Le premier phénomène est relié aux formes normales et distingue entre λI-calcul et λK-calcul. Nous rappelons que le λK-calcul est ce que nous avons appelé λ-calcul et le λI-calcul se distingue du λK-calcul en restreignant le langage Λ_I des λ-expressions à l'ensemble des λ-expressions dont toutes les sous-expressions de la forme $\lambda x \cdot M$ sont telles que M contient au moins une occurrence libre de x. En outre, il est clair que le langage Λ_I est clos par réductions.

<u>1.7. Lemme</u> : Si $M \in \Lambda_I$ est une λI-expression qui a une forme normale, alors M est fortement normalisable et donc toute sous-expression de M a une forme normale.

<u>Démonstration</u> : Soit N la forme normale de M (qui est unique par le théorème de Church-Rosser). Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux réductions quelconques entre M et N. On a $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 = \emptyset$ avec les notations de II.2, puisque N ne contient plus de radical. Donc $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ par définition. La proposition II.2.3.4 implique qu'il existe une et une seule réduction standard $\mathcal{D}_n$ telle que $\mathcal{D}_n \sim \mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, donc une seule réduction standard $\mathcal{D}_n$ entre M et N. (En fait on peut montrer que cette réduction est la réduction normale de M - voir II.1.4.1). Nous pouvons donc introduire sans aucune ambiguité la quantité $d_n(M)$ qui représentera la longueur de la réduction standard $\mathcal{D}_n$. En utilisant le théorème de correspondance de II.2.5.4 et le lemme II.3.7.7 valable pour le λI-calcul, si $\mathcal{D}$ est une réduction quelconque $M \overset{*}{\rightarrow} P$, on a $|\mathcal{D}| + d_n(P) \leq d_n(M)$ où $|\mathcal{D}|$ est la longueur de la réduction $\mathcal{D}$. Donc $|\mathcal{D}| \leq d_n(M)$ et M est fortement normalisable. □

1.8. Proposition : Soit $\leq_{op}$ la plus petite relation vérifiant

1) $M \leq_{op} N$ si M n'est pas une forme normale et N quelconque

2) $M \leq_{op} M$ si M est une forme normale

et soit $\leq^*_{op}$ la relation opérationnelle intensionnelle définie par $\leq_{op}$. Alors toute relation sémantique monotone contenant $\leq^*_{op}$ dégénère dans le λK-calcul, mais ne dégénère pas dans le λI-calcul.

Démonstration : Soit $\sqsubseteq$ une relation sémantique qui contient $\leq^*_{op}$ et notons $\equiv$ et $\equiv^*_{op}$ les relations d'équivalences associées. Pour tout M et N, si $M \leq^*_{op} N$, on a donc $M \sqsubseteq N$.

Si on est dans le λK-calcul et si on pose $\Delta = \lambda x{\cdot}xx$, on a $xz(\Delta\Delta) \equiv^*_{op} xy(\Delta\Delta)$. Donc $xz(\Delta\Delta) \equiv xy(\Delta\Delta)$. Comme $\equiv$ est une relation sémantique, on a $C[xz(\Delta\Delta)] \equiv C[xy(\Delta\Delta)]$ pour tout contexte C[ ]. En particulier, si $K = \lambda xy{\cdot}x$ et M est une λ-expression quelconque, on a $(\lambda xy{\cdot}xz(\Delta\Delta))KM \equiv (\lambda xy{\cdot}xy(\Delta\Delta))KM$. Puisque $\equiv$ est une relation sémantique, si $P \overset{*}{\to} Q$, on a $P \equiv Q$. Donc $z \equiv M$ pour toute expression M et la relation $\sqsubseteq$ dégénère.

Si on est dans le λI-calcul, alors la relation $\leq^*_{op}$ est une sémantique monotone du λI-calcul. En effet, par 1.6, on a $M \equiv^*_{op} N$ si $M \overset{*}{\to} N$. De plus, supposons que l'on ait $M \leq^*_{op} N$ et considérons un contexte quelconque C[ ]. Si C[M] n'a pas de forme normale, on a trivialement $C[M] \leq^*_{op} C[N]$. Si C[M] a une forme normale, le lemme précédent implique que M a aussi une forme normale M'. Comme $M \leq^*_{op} N$, alors N a la même forme normale M' puisque $M' \leq^*_{op} N'$ implique $M' = N'$ par définition. Donc $C[M] \overset{*}{\to} C[M']$ et $C[N] \overset{*}{\to} C[M']$. On a donc $C[M] \equiv^*_{op} C[M'] \equiv^*_{op} C[N]$. □

Cette démonstration figure chez Barendregt [1]. Ainsi la première relation sémantique qui vient à l'esprit dégénère sauf dans le λI-calcul qui n'a pas grand sens d'un point de vue informatique, car, dans les programmes, il existe bien des procédures qui ne tiennent pas compte de tous leurs arguments. Toutefois, comme le fait remarquer Barendregt [4], le λI-calcul est suffisamment puissant pour coder toutes les fonctions récursives partielles (voir Church [11]). Les formes normales ne remplissant pas leur sens intuitif et certains modèles du λ-calcul, notamment le modèle D_∞ de Scott [37], identifiant des λ-expressions qui ont des formes normales et des λ-expressions qui n'ont pas de forme normale (voir Wadsworth [44]), différents auteurs ont proposé d'autres relations syntaxiques.

D'abord, Morris [28] a considéré la sémantique opérationnelle extensionnelle engendrée par la relation $\leq_{op}$ de 1.8. Cette sémantique n'est pas incohérente (voir Hyland [19]) et Morris [28] a démontré que l'expression $Y = \lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))\ (\lambda x \cdot f(xx))$ est telle que YM est le plus petit point fixe de M dans cette sémantique pour toute expression M. Mais le deuxième type de solution proposé par Barendregt [1] et Wadsworth [44] est d'introduire un nouveau type d'expressions, les expressions qui ont une forme normale de tête ou expressions solvables.

1.9. Définition : Un *contexte* C [ ] est *strict* ssi il existe une expression M telle que C[M] n'a pas de forme normale. Une *expression* M est *solvable* ssi il existe un contexte strict C [ ] tel que C[M] a une forme normale.

Nous avons défiguré la définition de Barendregt [1] et nous nous en excusons. Cette définition est équivalente comme nous le verrons plus tard. Une expression M non solvable est donc un puits d'information, car s'il existe une expression N telle que le calcul de C[N] ne peut pas se terminer, alors il en est de même pour C[M]. Mais si le calcul de C[M] se termine, alors C[N] a une forme normale pour tout N.

1.10. Formes normales de tête (Wadsworth [44]) :

1.10.1. Définition : Une *forme normale de tête*, en abrégé f.n.t., est une expression de la forme $\lambda x_1\ x_2\ \ldots\ x_m \cdot x\ M_1\ M_2\ \ldots\ M_n$ où $x, x_1, x_2, \ldots x_m$ sont des variables quelconques et $m \geq 0$, où $M_1, M_2, \ldots M_n$ sont des expressions quelconques et $n \geq 0$. La variable x qui peut être libre ou liée est appelée la *variable de tête*.

Toute expression qui n'est pas en f.n.t est donc clairement de la forme $\lambda x_1\ x_2\ \ldots\ x_m \cdot (\lambda x \cdot M)N\ M_1\ M_2\ \ldots\ M_n$ où $m, n \geq 0$. Elle contient donc un *radical de tête* qui est son radical $(\lambda x \cdot M)N$ le plus à gauche. Nous adopterons parfois une notation vectorielle et les deux types d'expressions précédentes s'écriront $\lambda \vec{x} \cdot x \vec{M}$ et $\lambda \vec{x} \cdot (\lambda x \cdot M) N\ \vec{M}$. Une expression M *a une forme normale de tête*, en abrégé a une f.n.t., s'il existe une expression N en f.n.t. telle que $M \overset{*}{\to} N$.

1.10.2. Définition : Deux expressions M et N en *f.n.t.* sont *semblables*, et nous écrirons $M \simeq N$, ssi on a

$$M = \lambda x_1\ x_2\ \ldots\ x_m \cdot x\ M_1\ M_2\ \ldots\ M_n$$

$$N = \lambda x_1\ x_2\ \ldots\ x_m \cdot x\ N_1\ N_2\ \ldots\ N_n$$

Nous rappelons que nous ignorons les α-conversions et que l'égalité est en fait l'égalité modulo quelques renommages des variables liées. La relation précédente est trivialement une relation d'équivalence. Intuitivement, deux f.n.t sont semblables ssi elles ont même structure au premier niveau.

1.10.3. Proposition : Si $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$, si N et P sont en f.n.t., alors $N \simeq P$.

Démonstration : Par le théorème de Church-Rosser, il existe Q tel que $N \overset{*}{\to} Q$ et $P \overset{*}{\to} Q$. Or on a N en f.n.t., c'est-à-dire $N = \lambda x_1\ x_2 \ldots x_m \cdot x\ N_1\ N_2 \ldots N_n$. La réduction $N \overset{*}{\to} Q$ ne peut être qu'interne à chacun des N_i. D'où Q est en f.n.t. et $N \simeq Q$. De la même manière $P \simeq Q$. D'où par transitivité $N \simeq P$. □

1.10.4. Notation : Nous considérons la fonction Fnt définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{Fnt}(\lambda\vec{x}\cdot x\vec{M}) = \lambda\vec{x}\cdot x\vec{M} \\ \mathrm{Fnt}(\lambda\vec{x}\cdot(\lambda x\cdot M)N\vec{M}) = \mathrm{Fnt}(\lambda\vec{x}\cdot M[x\backslash N]\vec{M}) \end{cases}$$

Par Fnt(M), nous désignons donc la première f.n.t obtenue en effectuant la réduction normale de M (voir II.1.4). Cette fonction n'est donc pas définie pour tout M. Et nous avons $M \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} \mathrm{Fnt}(M)$ si Fnt(M) est défini. Cette dernière réduction est encore appelée *la réduction de tête de M*, car elle ne consiste qu'à contracter des radicaux de tête.

1.10.5. Lemme : Toute réduction standard $M \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} \lambda\vec{x}\cdot x\vec{N}$ se décompose en $M \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} \mathrm{Fnt}(M) \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} \lambda\vec{x}\cdot x\vec{N}$

Démonstration : Posons $N = \lambda\vec{x}\cdot x\vec{N}$ et soit ℓ la longueur de la réduction $M \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} N$ considérée. Raisonnons par récurrence sur ℓ.

Cas 1 : M est en f.n.t. Alors M = Fnt(M).

Cas 2 : $M = \lambda\vec{x}\cdot(\lambda x\cdot P)Q\vec{M}$. Considérons l'expression M' telle que $M \overset{R}{\rightarrow} M' \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} N$ soit la réduction standard considérée. Le radical R est forcément le radical de tête de M. En effet, comme cette réduction est standard et comme le radical de tête de M est le plus à gauche dans M, si ce radical n'est pas contracté entre M et M', on ne peut contracter ses résidus par la suite et on aboutirait à une expression N qui ne serait pas une f.n.t. Donc $M' = \lambda\vec{x}\cdot P[x\backslash Q]\vec{M}$ et, par récurrence, la réduction $M' \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} N$ considérée est de la forme $M' \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} \mathrm{Fnt}(M') \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} N$. Comme on a Fnt(M) = Fnt(M') par définition, la réduction $M \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} N$ est de la forme $M \overset{*}{\underset{norm}{\rightarrow}} \mathrm{Fnt}(M) \overset{*}{\underset{st}{\rightarrow}} N$. □

<u>1.10.6. Proposition</u> : Si $M \overset{*}{\to} N$ et si N est en f.n.t, alors

1) $\mathrm{Fnt}(M)$ est défini

2) $M \underset{norm}{\overset{*}{\to}} \mathrm{Fnt}(M) \overset{*}{\to} N$

3) si $\mathcal{D}$ est la réduction $M \overset{*}{\to} N$ et si $\mathcal{D}_t$ est la réduction de tête de M, alors $\mathcal{D}_t \leq \mathcal{D}$.

<u>Démonstration</u> : On applique le théorème de standardisation et le lemme précédent. De plus, si $\mathcal{D}_{st}$ est la réduction standard considérée, on a $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}_{st}$ par II.2.3.3. Comme $\mathcal{D}_{st} = \mathcal{D}_t \,;\mathcal{D}'$, on a $\mathcal{D}_t/\mathcal{D}_{st} = \sigma$. D'où $\mathcal{D}_t \leq \mathcal{D}_{st} \sim \mathcal{D}$. □

Les formes normales de tête ont donc un comportement identique aux formes normales. Elles sont uniques modulo la relation $\simeq$ et il existe un moyen standard, la réduction normale, pour en obtenir une. Toutefois, il existe une forme normale de tête minimale, c'est celle que l'on obtient par la réduction de tête et, ceci nous a été suggéré par Berry [7], cette réduction est également minimale vis à vis de l'ordre que nous avons introduit en II.2. Remarquons également que les formes normales sont des f.n.t. particulières et donc que toute expression qui a une forme normale a une f.n.t. La réciproque n'est pas vraie. Prendre $M = x(\Delta\Delta)$ où $\Delta = \lambda x \bullet xx$.

<u>1.10.7. Proposition</u> : Toute expression qui a une f.n.t. est solvable.

<u>Démonstration</u> : Supposons $M \overset{*}{\to} N$ et $N = \lambda x_1\, x_2 \ldots x_m \bullet x\, N_1\, N_2 \ldots N_n$. Nous avons deux cas selon que x est liée ou non. Posons $K_a^n = \lambda y_1\, y_2 \ldots y_n \bullet a$ et $\Delta = \lambda x \bullet xx$.

<u>Cas 1</u> : $N = \lambda x_1\, x_2 \ldots x_m \bullet x_i\, N_1\, N_2 \ldots N_n$. Considérons le contexte $C[\ ] = [\ ]A_1\, A_2 \ldots A_m$ où $A_i = K_a^n$ et A_j sont quelconques pour $i \neq j$. Alors $C[M] \overset{*}{\to} C[N] \overset{*}{\to} a$. De plus, le contexte $C[\ ]$est strict, car $C[\Delta\Delta] = (\Delta\Delta)\, A_1\, A_2 \ldots A_n$ n'a pas de forme normale.

<u>Cas 2</u> : $N = \lambda x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_m . x \, N_1 \, N_2 \, \ldots \, N_n$ et x est libre dans N. Considérons le contexte $C[\;] = (\lambda x.[\;]) \, K_a^n \, A_1 \, A_2 \, \ldots \, A_m$ où A_i est quelconque pour tout i. Alors $C[M] \overset{*}{\rightarrow} C[N] \overset{*}{\rightarrow} a$. De plus, le contexte $C[\;]$ est strict, car $C[\Delta\Delta] \overset{*}{\rightarrow} (\Delta\Delta) \, A_1 \, A_2 \, \ldots \, A_m$ et $C[\Delta\Delta]$ n'a pas de forme normale.□

Nous montrerons plus tard la réciproque.

Nous allons définir une relation opérationnelle intensionnelle (conformément à la terminologie de 1.4) dont le critère de précision reposera sur les notions de forme normale de tête et d'approximation directe dues à Wadsworth [44]. Et nous montrerons que la relation ainsi définie est une sémantique monotone du λ-calcul. Cette approche est parallèle à celle considérée pour les programmes récursifs par Courcelle[12], Nivat [29], Vuillemin [43].

2) λ-EXPRESSIONS D'INFORMATION FINIE

2.1. Approximation directe (Wadsworth [44])

Nous introduisons un nouveau symbole Ω dont l'interprétation intuitive est la valeur "indéfinie". L'approximation directe d'une expression M, notée $\omega(M)$, est censée représenter l'information présente dans M sans contracter aucun de ses radicaux. La quantité $\omega(M)$ est donc obtenue à partir de M en remplaçant tous les radicaux de M par la constante Ω et en appliquant, autant que possible, les deux règles ω-règles suivantes :

1) Toute sous-expression de la forme ΩN est remplacée par Ω,

2) Toute sous-expression de la forme $\lambda x{\cdot}\Omega$ est remplacée par Ω.

Nous remarquons qu'il suffit en fait de remplacer les radicaux les plus externes de M et cette définition a donc bien un sens que nous pouvons résumer de la manière suivante :

2.1.1. Définition : L'*approximation directe* $\omega(M)$ d'une expression M est définie par :

$$\omega(M) = \begin{cases} \lambda x_1\, x_2 \ldots x_m{\cdot}x(\omega(M_1))(\omega(M_2))\ldots(\omega(M_n)) & \text{si } M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m{\cdot}\, x\, M_1 M_2 \ldots M_n \\ \Omega & \text{si M n'est pas en f.n.t.} \end{cases}$$

Nous résumerons le premier cas de cette définition en écrivant $\omega(M) = \lambda\vec{x}{\cdot}x(\omega(\vec{M}))$ si $M = \lambda\vec{x}{\cdot}x\vec{M}$. Avec l'interprétation indéfinie intuitive de Ω, on s'attend donc à gagner de l'information au fur et à mesure que l'on réduit l'expression M et ainsi définir un critère de précision en se servant des approximations directes. Nous considérons donc d'abord la structure de l'ensemble image $\omega(\Lambda)$ de Λ par ω.

2.2. L'ensemble $\mathcal{N}$ des ω-β -formes normales

2.2.1. Définition : L'ensemble $\mathcal{N}$ des *ω-β-formes normales* est le plus petit sous-ensemble contenant

1) Ω

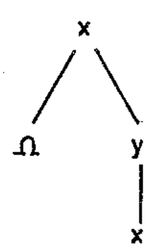
2) $\lambda x_1\, x_2 \ldots x_m \cdot x\; a_1\, a_2 \ldots a_n$ si $m, n \geq 0$ et $a_i \in \mathcal{N}$ pour tout i

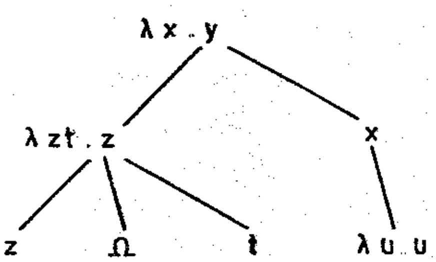
La dénomination ω-β-forme normale se justifie, car toute expression de $\mathcal{N}$ ne contient pas de β-radical, ni de ω-radical au sens des ω-règles vues en 2.1 et réciproquement.

2.2.2. Proposition : $\mathcal{N} = \omega(\Lambda)$.

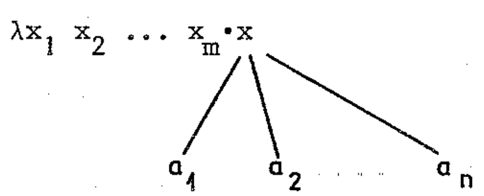
Démonstration : triviale.□

La taille d'une approximation ou ω-β -forme normale est définie de la même manière que la taille d'une λ-expression. Et on peut remarquer que l'on peut représenter tout élément de $\mathcal{N}$ par un arbre dont chaque noeud correspond à "un niveau de f.n.t" et chaque feuille correspond à un Ω ou à une ω-β -forme normale de la forme $\lambda x_1\, x_2 \ldots x_m \cdot x$. Par exemple, les approximations $x\Omega(yx)$ et $\lambda x \cdot y(\lambda zt \cdot zz\; \Omega t)(x(\lambda u \cdot u))$ sont représentées par les arbres





De manière générale, si $a = \lambda x_1\, x_2 \ldots x_m \cdot x\; a_1\, a_2 \ldots a_n$, l'arbre correspondant sera



Ces arbres correspondent donc à ceux de Courcelle [12]ou Nivat [29] et sont encore appelés arbres de Böhm par Barendregt [3] (ou du moins leur version infinie que nous verrons plus tard). Nous introduisons un ordre partiel sur $\mathcal{N}$, en se souvenant que la signification intuitive de Ω est l'"indéfini".

<u>2.2.3. Définition</u> : Nous considérons la plus petite relation $\leq$ sur $\mathcal{N}$ compatible avec la structure de $\mathcal{N}$ contenant la relation $\Omega \leq a$ pour tout a de $\mathcal{N}$. Et, si $a \leq b$, nous dirons que a est <u>*moins défini que*</u> b.

<u>2.2.4. Proposition</u> : On a $a \leq b$ ssi

1) $a = \Omega$

2) $a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ a_1 a_2 \ldots a_n$, $b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ b_1\ b_2 \ldots b_n$ et $a_i \leq b_i$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$.

<u>Démonstration</u> : immédiate. □

Souvenons-nous que nous ignorons les α-conversions : on a par exemple $\lambda x \cdot x\Omega \leq \lambda y \cdot yy$. De plus, sous forme d'arbre, on a $a \leq b$ ssi l'arbre a est un préfixe de l'arbre b, les seules différences autorisées étant des Ω. Cette définition de l'ordre est purement syntaxique et ne fait appel à aucune interprétation. Nous nous éloignons donc de l'ordre considéré par Wadsworth [44] et nous rapprochons de l'ordre considéré par Nivat [29]et Vuillemin [43]. D'autre part, il est clair que $\leq$ définit un ordre partiel sur $\mathcal{N}$. Nous regardons de plus près la structure induite par $\leq$ sur $\mathcal{N}$.

<u>2.2.5. Proposition</u> : L'ordre $\leq$ est bien fondé sur $\mathcal{N}$, c'est-à-dire il n'existe pas de chaîne infinie strictement décroissante.

<u>Démonstration</u> : évidente.□

<u>2.2.6. Proposition</u> : $\mathcal{N}$ a une structure d'inf-demi-treillis, ou plus exactement :

1) Il existe un élément minimum Ω

2) Toute paire d'éléments a et b de $\mathcal{N}$ possède un plus grand commun minorant Min(a,b) défini par

$$\mathrm{Min}(a,b) = \begin{cases} \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x(\mathrm{Min}(a_1,b_1))(\mathrm{Min}(a_2,b_2))\ldots(\mathrm{Min}(a_n,b_n)) \\ \qquad \text{si } a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ a_1 a_2 \ldots a_n \\ \qquad \text{et } b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ b_1 b_2 \ldots b_n \\ \Omega \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration : immédiate. □

2.2.7. Proposition : Toute paire d'éléments a et b de $\mathcal{N}$, ayant au moins un majorant commun, a un plus petit commun majorant Max(a,b) défini par

$$\mathrm{Max}(a,b) = \begin{cases} a \quad \text{si } b = \Omega \\ b \quad \text{si } a = \Omega \\ \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x(\mathrm{Max}(a_1,b_1))(\mathrm{Max}(a_2,b_2))\ldots(\mathrm{Max}(a_n,b_n)) \\ \qquad \text{si } a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ a_1 a_2 \ldots a_n \\ \qquad \text{et } b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ b_1 b_2 \ldots b_n \end{cases}$$

Démonstration : immédiate. □

Comme annoncé, une structure élémentaire de demi-treillis est apparue. Nous allons transformer la relation $\leq$ de $\mathcal{N}$ en critère de précision sur Λ. Auparavant, nous montrons que la structure de treillis se préserve sur les sous-ensembles d'approximations d'une expression.

2.3. Le treillis des approximations d'une expression

2.3.1. Définition : Si $M \in \Lambda$, l'ensemble des *approximations* de M est le sous-ensemble $\mathcal{A}(M) = \{\omega(N) | M \overset{*}{\rightarrow} N\}$.

Donc, si $\mathcal{E}(M) = \{N | M \overset{*}{\rightarrow} N\}$ est l'ensemble des expressions dérivables de M, on a $\mathcal{A}(M) = \omega(\mathcal{E}(N))$. Nous montrons que la relation sur Λ induite par $\omega(M) \leq \omega(N)$ est un critère de précision.

2.3.2. Proposition : Si $M \overset{*}{\rightarrow} N$, alors $\omega(M) \leq \omega(N)$.

Démonstration : par récurrence sur la taille de M, $||M||$.

Cas 1 : Si M n'est pas en f.n.t., alors $\omega(M) = \Omega \leq \omega(N)$.

Cas 2 : Si $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$, alors comme $M \overset{*}{\rightarrow} N$, on a $N = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ N_1 N_2 \ldots N_n$ et $M_i \overset{*}{\rightarrow} N_i$ pour tout i. Comme $||M_i|| < ||M||$, on a $\omega(M_i) \leq \omega(N_i)$ par récurrence. D'où $\omega(M) \leq \omega(N)$ par définition de ω et $\leq$. □

2.3.3. Proposition : Si $M \in \Lambda$, l'ensemble $\mathcal{A}(M)$ des approximations de M est un sous-treillis de $\mathcal{N}$. Plus précisément :

1) $\omega(M)$ est l'élément minimal de M,

2) si a, b $\in \mathcal{A}(M)$, alors Min(a,b) $\in \mathcal{A}(M)$ et est le plus grand commun minorant de a et b,

3) si a, b $\in \mathcal{A}(M)$, alors Max(a,b) $\in \mathcal{A}(M)$ et est le plus petit commun majorant de a et b.

Démonstration :

1) Si $M \overset{*}{\rightarrow} N$, on a $\omega(M) \leq \omega(N)$ par 2.3.2.

2) Si $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$, si $b = \omega(N)$ et $c = \omega(P)$, alors nous voulons montrer que $\mathrm{Min}(b,c) \in \mathcal{A}(M)$. Si N ou P n'est pas en f.n.t., alors on a $b = \Omega$ ou $c = \Omega$. Donc $\mathrm{Min}(b,c) = \Omega$. Par ailleurs, l'expression M ne peut être en f.n.t. car sinon les expressions N et P seraient en f.n.t. Si N et P sont tous les deux en f.n.t., alors $M \overset{*}{\to} \mathrm{Fnt}(M) \overset{*}{\to} N$ et $\mathrm{Fnt}(M) \overset{*}{\to} P$ par 1.10.5. Alors si on pose $\mathrm{Fnt}(M) = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \dots M_n$, $N = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ N_1 N_2 \dots N_n$ et $P = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ P_1 P_2 \dots P_n$, alors on a $M_i \overset{*}{\to} N_i$ et $M_i \overset{*}{\to} P_i$ pour $1 \le i \le n$. De plus, on a $b = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ b_1 b_2 \dots b_n$ et $c = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ c_1 c_2 \dots c_n$. Par récurrence sur $||N||$, on a $\mathrm{Min}(b_i, c_i) \in \mathcal{A}(M_i)$ pour tout i. Donc, en appliquant la définition de Min et si Q_i est une expression dérivable de M_i telle que $\omega(Q_i) = \mathrm{Min}(b_i, c_i)$, on a $M \overset{*}{\to} \mathrm{Fnt}(M) \overset{*}{\to} \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ Q_1 Q_2 \dots Q_n = Q$ et donc $\mathrm{Min}(b,c) = \omega(Q) \in \mathcal{A}(M)$.

3) Si $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$, alors on montre que $\mathrm{Max}(\omega(N),\omega(P)) \in \mathcal{A}(M)$ par le même argument en remarquant que $\omega(N)$ et $\omega(P)$ ont au moins un majorant commun par le théorème de Church-Rosser et 2.3.2. □

Remarquons que l'ensemble $\mathcal{A}(M)$ n'a pas forcément d'élément maximal. Il suffit par exemple de considérer $M = Y = \lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx))$ qui est tel que $\mathcal{A}(Y) = \{\ \Omega, \lambda f \cdot f(\Omega), \lambda f \cdot f(f(\Omega)), \dots\}$. Si $\mathcal{A}(M)$ n'a pas d'élément maximal, alors M n'a pas de forme normale. Mais la réciproque est en général fausse. En effet, si M n'a pas de f.n.t., on a $\mathcal{A}(M) = \{\Omega\}$. De même $\mathcal{A}(x(\Delta\Delta)(Ix)) = \{x\Omega\Omega, x\Omega x\}$ si $I = \lambda x \cdot x$ et $\Delta = \lambda x \cdot xx$. En outre, si M a une forme normale N, on a $N \in \mathcal{A}(M)$. Si $\mathcal{A}(M)$ a un élément maximal, nous dirons encore que M a une information finie. Nous voulons donc aussi considérer les expressions d'information infinie. Et nous allons utiliser une méthode opérationnelle intensionnelle telle que nous l'avons décrite en 1.4.

Mais auparavant, nous donnons quelques propriétés supplémentaires des approximations. En effet, cette structure de treillis n'est pas l'effet du hasard. Elle provient directement de la structure de treillis formée par les réductions que nous avons vues en II.2.

2.4. Approximations et réductions gauches

Cette partie nous a été indiquée par Berry [7]et précise ce que nous avions en[23,24]. Nous considérons d'abord les approximations généralisées (voir Wadsworth[44] ou Hyland[19]).

2.4.1. Définition : L'ensemble $\bar{\mathcal{A}}(M)$ des *approximations généralisées* de M est le sous-ensemble $\bar{\mathcal{A}}(M) = \{a \mid a \leq b,\ b \in \mathcal{A}(M)\}$ de $\mathcal{N}$.

L'ensemble $\bar{\mathcal{A}}(M)$ est obtenu à partir de $\mathcal{A}(M)$ par clôture vers le bas. Nous utiliserons aussi le mot approximation pour les éléments de $\bar{\mathcal{A}}(M)$ et, chaque fois que nous voudrons être plus précis, nous ajouterons généralisées ou non. L'ensemble $\bar{\mathcal{A}}(M)$ est aussi un sous-treillis de $\mathcal{N}$ en appliquant trivialement 2.3.3.

2.4.2. Définition : Un *radical de gauche* dans une expression M est le radical de tête si M n'est pas en f.n.t. ou un radical de gauche d'un M_i si $1 \leq i \leq n$ et $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$. Une réduction qui ne contracte que des radicaux de gauche est appelée *réduction gauche*.

Remarquons que, si M est en f.n.t., un radical de gauche de M n'est pas forcément le radical le plus à gauche de M. Mais la réduction de tête ou la réduction normale sont des cas particuliers de réductions gauches. Une réduction gauche n'est pas non plus forcément standard.

2.4.3. Notation : Si $a \in \bar{\mathcal{A}}(M)$, nous considérons la fonction Fnt_a définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{Fnt}_a(M) = M & \text{si } a \leq \omega(M) \\ \mathrm{Fnt}_a(M) = \mathrm{Fnt}_a(\mathrm{Fnt}(M)) & \text{si } a \neq \Omega \text{ et } \omega(M) = \Omega \\ \mathrm{Fnt}_a(M) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x(\mathrm{Fnt}_{a_1}(M_1))(\mathrm{Fnt}_{a_2}(M_2))\ldots(\mathrm{Fnt}_{a_n}(M_n)) & \end{cases}$$

si $a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ a_1 a_2 \ldots a_n$ et $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$

<u>2.4.4. Proposition</u> : Si $M \overset{*}{\to} N$ et si $a \leq \omega(N)$, alors on a

1) $M \overset{*}{\to} Fnt_a(M) \overset{*}{\to} N$ et il existe une réduction gauche $\mathcal{D}_a(M)$ entre M et $Fnt_a(M)$.

2) Si $\mathcal{D}$ est la réduction $M \overset{*}{\to} N$ considérée, on a $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$.

<u>Démonstration</u> : analogue à 1.10.6. Par le théorème de standardisation et par II.2.3.3, il existe une réduction standard $\mathcal{D}_{st}$ de la forme $M \overset{*}{\underset{st}{\to}} N$ telle que $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}_{st}$. Soit $\ell = |\mathcal{D}_{st}|$ la longueur de $\mathcal{D}_{st}$. Raisonnons par récurrence sur $<\ell, ||M||>$.

<u>Cas 1</u> : $a \leq \omega(M)$. Alors $Fnt_a(M) = M$ et $\mathcal{D}_a(M) = 0$

<u>Cas 2</u> : $a \neq \Omega$ et $\omega(M) = \Omega$. Alors N est en f.n.t. puisque $a \leq \omega(N)$ implique $\omega(N) \neq \Omega$. Par 1.10.5, on a $\mathcal{D}_{st} = \mathcal{D}_t \,;\, \mathcal{D}'_{st}$ si $\mathcal{D}_t$ est la réduction de tête de M. Comme $\omega(M) = \Omega$, l'expression M n'est pas en f.n.t. et donc $|\mathcal{D}_t| > 0$. Donc $\mathcal{D}'_{st}$ qui est standard a une longueur strictement inférieure à ℓ. Donc par récurrence, il existe une réduction gauche $\mathcal{D}_a(Fnt(M))$ de la forme $Fnt(M) \overset{*}{\to} Fnt_a(Fnt(M)) = Fnt_a(M)$ et $Fnt_a(M) \overset{*}{\to} N$. Or $\mathcal{D}_t$ est une réduction gauche. Donc la réduction $\mathcal{D}_a(M) = \mathcal{D}_t \,;\, \mathcal{D}_a(Fnt(M))$ est une réduction gauche. De plus, par récurrence, on a $\mathcal{D}_a(Fnt(M)) \leq \mathcal{D}'_{st}$. Donc $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}_t \,;\, \mathcal{D}'_{st} = \mathcal{D}_{st} \sim \mathcal{D}$ par II.2.2.8.

<u>Cas 3</u> : $a \neq \Omega$ et $\omega(M) \neq \Omega$. Alors $a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ a_1 a_2 \ldots a_n$ et $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$ par définition de $\leq$ et de ω et par 1.10.3. De plus $N = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ N_1 N_2 \ldots N_n$ et $M_i \overset{*}{\to} N_i$ et $a_i \leq \omega(N_i)$ pour tout i. On obtient donc le résultat par récurrence sur $||M_i||$. □

Toute approximation (généralisée) de M peut être donc dépassée de manière minimale par une réduction gauche. De plus, on peut montrer que les réductions gauches forment un sous-treillis du sup-treillis des réductions vues en II.2. Et le treillis des approximations et le treillis des réductions gauches se correspondent donc par 2.4.4.

2.4.5. Notation : Si M a une f.n.t., nous notons Dfnt(M) la longueur de la réduction de tête $M \overset{*}{\underset{\text{norm}}{\rightarrow}} \mathrm{Fnt}(M)$. De même, si a est une approximation de M, nous notons $\mathrm{Dfnt}_a(M)$ la quantité suivante :

$$\mathrm{Dfnt}_{\Omega}\ (M) = 0$$

$$\mathrm{Dfnt}_a\ (M) = \mathrm{Dfnt}\ (M) + \mathrm{Dfnt}_a\ (\mathrm{Fnt}(M)) \qquad \text{si } a \neq \Omega$$

$$\mathrm{Dfnt}_a\ (M) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Dfnt}_{a_i}(M_i) \text{ si } M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$$

et $a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ a_1 a_2 \ldots a_n$.

3) λ-EXPRESSIONS D'INFORMATION INFINIE

3.1. Complétion de $\mathcal{N}$ par idéaux

Il s'agit d'ajouter des points infinis à $\mathcal{N}$. En effet, toute chaîne croissante de $\mathcal{N}$ n'a pas forcément de limite dans $\mathcal{N}$. Nous complétons $\mathcal{N}$ avec des points infinis de telle manière que toute chaîne croissante ou ensemble dirigé ait une limite dans l'ensemble $\mathcal{N}$ complété. La technique que nous utilisons est celle utilisée par Berry [7], Kahn [20], Vuillemin [43], ... Une grande partie de la terminologie vient aussi de Scott [37].

3.1.1. Définition : Un *sous-ensemble* S *dirigé* de $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble tel que si x et y sont dans S, alors il existe un z de S tel que $x \leq z$ et $y \leq z$.

3.1.2. Définition : Un *idéal*, ou *idéal dirigé*, I de $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble dirigé de $\mathcal{N}$ tel que, si x est dans I et $y \leq x$, alors y est dans I.

Les ensembles dirigés sont donc pointus et les idéaux sont les ensembles dirigés particuliers qui sont clos vers le bas. En outre, nous remarquons que $\mathcal{A}(M)$ est un idéal.

3.1.3. Notation : $\bar{\mathcal{N}} = \{I \mid I \subset \mathcal{N}, \text{ I idéal}\}$

Nous considérons à présent $\bar{\mathcal{N}}$ muni de l'opération $\subset$ d'inclusion des ensembles et nous allons voir que nous avons bien complété $\mathcal{N}$ en préservant sa structure.

3.1.4. Proposition : $\bar{\mathcal{N}}$ a une structure d'inf-demi-treillis, ou plus exactement :

1) il existe un élément minimum $\{\Omega\}$

2) toute paire d'éléments I et I' de $\bar{\mathcal{N}}$ possède un plus grand commun minorant $I \cap I'$.

Démonstration : immédiate car, si $I \in \overline{\mathcal{N}}$, alors $\Omega \in I$. De plus, si I et I' sont des éléments de $\overline{\mathcal{N}}$, leur intersection $I \cap I'$ est un idéal. En effet, si $a \in I \cap I'$ et $b \in I \cap I'$, il existe c et c' dans I et I' tel que $a \le c$, $b \le c$, $a \le c'$ et $b \le c'$. On a donc $a \le \mathrm{Min}(c, c')$ et $b \le \mathrm{Min}(c, c')$. Or $\mathrm{Min}(c, c') \in I \cap I'$ puisque I et I' sont clos vers le bas. □

3.1.5. Définition : L'*idéal engendré par un sous-ensemble* S *dirigé* de $\mathcal{N}$, noté $\overline{S}$, est défini par $\overline{S} = \{a \mid a \le b,\ b \in S\}$. Si $S = \{a\}$, alors $\overline{S}$ est un *idéal principal*.

3.1.6. Proposition : Toute paire d'éléments I et I' de $\overline{\mathcal{N}}$, ayant au moins un majorant commun, a un plus petit commun majorant $I \sqcup I' = \overline{E}$ où $E = \{\mathrm{Max}(a,a') \mid a \in I,\ a' \in I'\}$.

Démonstration : D'abord E et donc $\overline{E}$ sont dirigés puisque I et I' le sont. De plus, on a $\overline{E}$ clos vers le bas par définition. Par ailleurs, on a $I \subset \overline{E}$ et $I' \subset \overline{E}$ trivialement. De plus, si un idéal J majore I et I' et si on prend a quelconque dans $\overline{E}$, il existe b et b' dans I et I' tels que $a \le \mathrm{Max}(b,b')$. Comme $I \subset J$ et $I' \subset J$, on a b et b' dans J. Comme J est dirigé, il existe c dans J tel que $b \le c$ et $b' \le c$. Donc $\mathrm{Max}(b,b') \le c$ et comme J est clos vers le bas, on a $a \in J$. □

Les sous-ensembles dirigés de $\overline{\mathcal{N}}$ étant définis comme en 3.1.1., l'ensemble $\overline{\mathcal{N}}$ a une propriété plus forte que $\mathcal{N}$.

3.1.7. Proposition : $\overline{\mathcal{N}}$ est complet. Plus exactement, tout sous-ensemble dirigé S de $\overline{\mathcal{N}}$ admet une limite $\cup S$ dans $\overline{\mathcal{N}}$.

Démonstration : Il faut montrer que $\cup S$ est un idéal de $\mathcal{N}$. Si a et b sont dans $\cup S$, alors $a \in I_1$ et $b \in I_2$ où $I_1 \in S$ et $I_2 \in S$. Comme S est dirigé, on a un I_3 dans S tel que $I_1 \subset I_3$ et $I_2 \subset I_3$. Donc $a \in I_3$ et $b \in I_3$. Comme I_3 est dirigé, il existe c dans I_3, donc dans $\cup S$, tel que $a \le c$ et $b \le c$. D'autre part, on a $\cup S$ trivialement clos vers le bas. □

3.1.8. Proposition : $\bar{\mathcal{N}}$ est isomorphe à l'ensemble des idéaux principaux de $\mathcal{N}$.

Démonstration : Si a et b sont dans $\mathcal{N}$, nous notons I_a et I_b les idéaux principaux associés à a et b. On a trivialement $a \leq b$ ssi $I_a \subset I_b$. Donc Min(a,b) et Max(a,b) correspondent à $I_a \cap I_b$ et $I_a \cup I_b$. □

Dans la terminologie de Scott [37], l'ensemble $\bar{\mathcal{N}}$ a une base de points isolés isomorphes à $\mathcal{N}$. Donc $\bar{\mathcal{N}}$ est algébrique. Nous ne définissons pas ces notions ici qui ne nous seront pas utiles par la suite. Retenons simplement que nous avons complété $\mathcal{N}$.

3.2. Interprétation des λ-expressions

3.2.1. Définition : Nous considérons la fonction $\mathfrak{I} : \Lambda \to \bar{\mathcal{N}}$ d'*interprétation* définie par $\mathfrak{I}(M) = \bar{\mathcal{A}}(M)$ où $\bar{\mathcal{A}}(M)$ est l'ensemble des approximations (généralisées) de M.

3.2.2. Notation : Nous écrivons

$M \equiv_{\mathfrak{I}} N$ ou $M \equiv_{\omega\beta} N$ ou simplement $M \equiv N$ pour $\mathfrak{I}(M) = \mathfrak{I}(N)$

$M \sqsubseteq_{\mathfrak{I}} N$ ou $M \sqsubseteq_{\omega\beta} N$ ou simplement $M \sqsubseteq N$ pour $\mathfrak{I}(M) \subset \mathfrak{I}(N)$.

Nous préfèrerons les formules $M \equiv N$ ou $M \sqsubseteq N$ quand aucune ambiguité n'est possible. Par ailleurs, ces deux relations sont trivialement une équivalence et un préordre. Intuitivement, on peut voir $\mathfrak{I}(M)$ comme un arbre infini obtenu par limite à partir des arbres de 2.2. Cet arbre est appelé par Barendregt [3] arbre de Böhm, car c'est sur cette structure que s'appuie le fameux théorème de Böhm [5].

Nous avons quelques corollaires immédiats.

3.2.3. Corollaires

1) On a $M \sqsubseteq N$ ssi $\forall a \in \mathcal{A}(M)$, $\exists b \in \mathcal{A}(N)$. $a \leq b$,

2) On a $M \sqsubseteq N$ ssi $\forall M'$ $M \overset{*}{\to} M'$, $\exists N'$ $N \overset{*}{\to} N'$ et $\omega(M') \leq \omega(N')$,

3) L'expression M n'a pas de f.n.t. ssi $\forall N$ $M \sqsubseteq N$,

4) Si M a une f.n.t. M' et si $M \sqsubseteq N$, alors N a une f.n.t. N' telle que $M' \simeq N'$ (voir 1.10.2).

5) Si M a une forme normale P, on a $M \sqsubseteq N$ ssi $M \equiv N$ ssi N a la même forme normale P.

Par rapport au préordre $\sqsubseteq$, les expressions qui n'ont pas de f.n.t forment la classe minimale et les expressions qui ont une forme normale forment des classes maximales (d' information finie) différentes dès que les formes normales ne sont pas identiques (à des α-conversions près).

3.2.4. Notation : Nous posons $\Omega = \Delta\Delta$ si $\Delta = \lambda x \cdot xx$.

Cette notation est cohérente avec l'utilisation précédente de Ω dans $\mathcal{N}$. En effet, on a à présent $\mathcal{N} \subset \Lambda$ mais ceci ne pose aucun problème puisque, si nous appelons M_a l'expression de Λ correspondant à la ω-β-forme normale a, obtenue en substituant $\Delta\Delta$ à Ω dans a, on a trivialement $\bar{\mathcal{A}}(M_a) = \{b | b \leq a \text{ et } b \in \mathcal{N}\}$. Nous ne ferons plus de différence entre a et M_a. Et si X est un sous-ensemble dirigé de λ-expression c'est-à-dire si $\mathfrak{J}(X)$ est un sous-ensemble dirigé de $\bar{\mathcal{N}}$, nous écrirons $\bigsqcup X$ pour $\bigsqcup\mathfrak{J}(X)$ et nous n'hésiterons pas à écrire des formules de la forme $M \equiv \bigsqcup X$, ou $M \sqsubseteq \bigsqcup X$, ...

Nous pouvons donc définir les ω-règles sur l'ensemble des λ-expressions comme nous l'avons fait en 2.1. Nous noterons $M \underset{\omega}{\overset{*}{\to}} N$ une réduction faite de ω-conversions (conformément aux notations du chapitre I).

Nous avons donc trivialement.

3.2.5. Corollaires

1) On a $M \equiv \Omega$ ssi M n'a pas de f.n.t.,

2) $\Omega \sqsubseteq M$ pour tout M,

3) $M \equiv \bigsqcup \{a \mid a \in \mathcal{A}(M)\} \equiv \bigsqcup \{a \mid a \in \tilde{\mathcal{A}}(M)\}$

Nous avons vu en 3.2.3 que $\sqsubseteq$ est la relation opérationnelle intensionnelle définie par le critère de précision $\omega(M) \leq \omega(N)$. Nous démontrons que cette relation $\sqsubseteq$ est aussi une relation sémantique monotone au sens de 1.2.

4) $\underline{\sqsubset}$ EST UNE SEMANTIQUE MONOTONE DU λ-CALCUL

Il s'agit donc de montrer que $\xrightarrow{*}$ est compatible avec $\underline{\sqsubset}$ et que $\underline{\sqsubset}$ est compatible avec la structure des λ-expressions.

4.1. Validité de la β-règle et des ω-règles

4.1.1. Proposition : Si $M \xrightarrow{*} N$, alors $M \equiv N$.

Démonstration : par 1.6 grâce à 2.3.2. □

4.1.2. Proposition : Pour tout contexte $C[\ ]$ et pour toute expression M, on a

1) $\omega(C[\Omega]) \leq \omega(C[M])$

2) $C[\Omega] \underline{\sqsubset} C[M]$.

Démonstration : immédiate en nous souvenant que $\Omega = \Delta\Delta$.

1) Par récurrence sur $||C[\Omega]||$. Si $C[\ ]$ est un contexte qui n'est pas en f.n.t., c'est-à-dire $C[y] = \lambda\vec{x}\cdot(\lambda x\cdot P)Q\vec{N}$, alors $C[\Omega]$ n'est pas en f.n.t. et donc $\omega(C[\Omega]) = \Omega \leq \omega(C[M])$. Si $C[y]$ est en f.n.t., alors on a deux cas.

Cas 1 : $C[\ ] = \lambda x_1x_2\ldots x_m\cdot[\ ]\, M_1M_2\ldots M_n$. Alors $C[\Omega]$ n'est pas en f.n.t et $\omega(C[\Omega]) = \Omega \leq \omega(C[M])$.

Cas 2 : $C[\ ] = \lambda x_1x_2\ldots x_m\cdot x\, M_1M_2\ldots C_i[\ ]\ldots M_n$. Alors, par récurrence, on a $\omega(C_i[\Omega]) \leq \omega(C_i[M])$. D'où on obtient $\omega(C[\Omega]) \leq \omega(C[M])$.

2) Si $C'[\ ]$ est un contexte à plusieurs trous et en adoptant une notation vectorielle, on a donc $\omega(C'[\vec{\Omega}]) \leq \omega(C'[\vec{M}])$. Comme on a $\Omega = \Delta\Delta \overset{*}{\to} \Delta\Delta = \Omega$, si on considère P quelconque tel que $C[\Omega] \overset{*}{\to} P$, il existe une réduction isomorphe $C[M] \overset{*}{\to} Q$ telle que $P = C'[\vec{\Omega}]$ et $Q = C'[\vec{Q}]$. Donc on a $\omega(C'[\vec{\Omega}]) \leq \omega(C'[\vec{Q}])$ et $C[\Omega] \sqsubseteq C[M]$. □

<u>4.1.3. Lemme</u> : Si $M \underset{\omega}{\overset{*}{\to}} N$, alors $\omega(M) = \omega(N)$.

<u>Démonstration</u> : immédiate en nous souvenant que $\Omega = \Delta\Delta$.

Supposons d'abord $M \underset{\omega}{\to} N$. Et raisonnons par récurrence sur $||M||$. Si $M = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ M_1\ M_2 \dots M_n$, alors on a $N = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ N_1 N_2 \dots N_n$ où seul un des N_i diffère du M_i correspondant et $M_i \underset{\omega}{\to} N_i$. Par récurrence $\omega(M_i) = \omega(N_i)$. Donc $\omega(M) = \omega(N)$. Si $M = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot (\lambda x \cdot P)\ Q\ M_1 M_2 \dots M_n$, alors $\omega(M) = \Omega$ et on a plusieurs cas.

<u>Cas 1</u> : Si le ω-radical est dans P, Q ou un des M_i, alors N n'est pas en f.n.t. et $\omega(N) = \Omega = \omega(M)$.

<u>Cas 2</u> : Si $P = \Omega$ et $\lambda x \cdot P$ est le ω-radical converti, alors $N = \lambda\vec{x} \cdot \Omega Q \vec{M}$ et N n'est pas en f.n.t. Donc $\omega(N) = \Omega = \omega(M)$.

<u>Cas 3</u> : Si $P = xx$, $Q = \lambda x \cdot xx$ et le ω-radical contracté est $(\lambda x \cdot P) Q M_1$, alors $N = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot \Omega M_2 M_3 \dots M_n$ et N n'est pas en f.n.t. Donc $\omega(N) = \Omega = \omega(M)$.

A présent, si $M \underset{\omega}{\overset{*}{\to}} N$, on a $\omega(M) = \omega(N)$ par transitivité. □

Nous notons provisoirement $\underset{\omega_1}{\to}$ et $\underset{\omega_2}{\to}$ les deux types de ω-règles telles que nous les avons définies en 2.1. De plus, nous adoptons aussi provisoirement la notation $\xrightarrow{1}$ pour signaler que nous effectuons une réduction vide ou une contraction d'un seul radical. Nous considérons quelques propriétés de commutation entre la β-règle et les ω-règles.

4.1.4. Lemme :

1) Si $M \rightarrow N$ et si $M \underset{\omega_1}{\rightarrow} P$, alors $N \underset{\omega_1}{\overset{*}{\rightarrow}} Q$ et $P \xrightarrow{1} Q$,

2) Si $M \rightarrow N$ et si $M \underset{\omega_2}{\rightarrow} P$, alors $N \underset{\omega_2}{\overset{*}{\rightarrow}} Q$ et $P \underset{\beta,\omega_1}{\overset{1}{\rightarrow}} Q$,

3) Si $M \underset{\omega_1}{\rightarrow} N$ et si $M \underset{\omega_2}{\rightarrow} P$, alors $N \underset{\omega_2}{\overset{1}{\rightarrow}} Q$ et $P \underset{\omega_1}{\overset{1}{\rightarrow}} Q$.

Démonstration : Soient R et S les radicaux contractés entre M et N et entre M et P. Nous raisonnons sur les positions possibles pour R et S. Le cas où R et S sont disjoints est trivial.

1) $M \rightarrow N$ et $M \underset{\omega_1}{\rightarrow} P$. On a donc $R = (\lambda x{\cdot}A)B$ et $S = \Omega C$. Si R est contenu dans S, alors on a $R = \Omega = \Delta\Delta$ ou R dans C. Si $R = \Omega$, alors $N = M$ et $Q = P$. Si R est dans C, alors $N \underset{\omega_1}{\rightarrow} P = Q$. Si R contient S, alors S est dans A ou B. Dans les deux cas, il existe un radical R' résidu de R dans P et si $P \xrightarrow{R'} Q$, alors $N \underset{\omega_1}{\overset{*}{\rightarrow}} Q$.

2) $M \rightarrow N$ et $M \underset{\omega_2}{\rightarrow} P$. On a donc $R = (\lambda x{\cdot}A)B$ et $S = \lambda x{\cdot}\Omega$. Si R est contenu dans S, alors $R \equiv \Omega = \Delta\Delta$ et $N = M$ et $P = Q$. Si S est contenu dans R, alors on a $S = \lambda x{\cdot}A$ ou S dans A ou S dans B. Si $S = \lambda x{\cdot}A$, alors R devient $R' = \Omega B$ dans P et R devient Ω dans N. On a donc $P \underset{\omega_1}{\rightarrow} N = Q$. Si S est dans A ou B, alors R a un radical R' résidu dans P et si $P \xrightarrow{R'} Q$, alors $N \underset{\omega_2}{\overset{*}{\rightarrow}} Q$.

3) $M \underset{\omega_1}{\rightarrow} N$ et $M \underset{\omega_2}{\rightarrow} P$. On a donc $R = \Omega A$ et $S = \lambda x{\cdot}\Omega$. Alors S ne peut être que contenu dans A. Alors $P \underset{\omega_1}{\rightarrow} N = Q$. □

4.1.5. Lemme :

1) Si $M \overset{*}{\to} N$ et si $M \underset{\omega_1}{\overset{*}{\to}} P$, alors $N \underset{\omega_1}{\overset{*}{\to}} Q$ et $P \overset{*}{\to} Q$

2) Si $M \overset{*}{\to} N$ et si $M \underset{\omega_2}{\overset{*}{\to}} P$, alors $N \underset{\omega_2}{\overset{*}{\to}} Q$ et $P \underset{\beta,\omega_1}{\overset{*}{\to}} Q$

Démonstration : par récurrence sur $<\ell, m>$ où ℓ et m sont les longueurs des réductions $M \overset{*}{\to} N$ et $M \overset{*}{\to} P$ en appliquant trivialement le lemme de commutation précédent. □

4.1.6. Proposition : Si $M \underset{\omega}{\overset{*}{\to}} N$, alors $M \equiv N$.

Démonstration : On a déjà $N \sqsubseteq M$ par 4.1.2 (2ème clause). Montrons que l'on a aussi $M \sqsubseteq N$.

1) Si $M \underset{\omega_1}{\overset{*}{\to}} N$, considérons M' quelconque tel que $M \overset{*}{\to} M'$. Alors par le lemme précédent, il existe N' tel que $M' \underset{\omega}{\overset{*}{\to}} N'$ et $N \overset{*}{\to} N'$. On a $\omega(M') = \omega(N')$ par 4.1.3. Donc $M \sqsubseteq N$.

2) Si $M \underset{\omega_2}{\overset{*}{\to}} N$, considérons M' quelconque tel que $M \overset{*}{\to} M'$. Alors par le lemme précédent, il existe N' tel que $M' \underset{\omega}{\overset{*}{\to}} N'$ et $N \underset{\beta,\omega_1}{\overset{*}{\to}} N'$. On a donc $\omega(M') = \omega(N') \sqsubseteq N'$ par 4.1.3 et 4.1.2. De plus, on vient de montrer que $N \equiv N'$. Donc $\omega(M') \sqsubseteq N'$. Comme on a $M = \bigsqcup\{\omega(M') | M \overset{*}{\to} M'\}$ (voir 3.2.5), on a $M \sqsubseteq N$. □

4.2. $\sqsubseteq$ est compatible avec la structure de Λ:

4.2.1. Lemme : Pour tout contexte $C[\ ]$, on a

1) si $a \leq b$, alors $C[a] \sqsubseteq C[b]$

2) si a $\in \mathscr{A}(M)$, alors $C[a] \sqsubseteq C[M]$

3) $\bigsqcup\{C[a] \mid a \in \mathscr{A}(M)\} \equiv \bigsqcup\{C[a] \mid a \in \bar{\mathscr{A}}(M)\} \sqsubseteq C[M]$

Démonstration

1) Si $a \lesssim b$, alors a se distingue de b par substitution de quelques sous-expressions de b par Ω. Donc on a $C[a] \sqsubseteq C[b]$ par transitivité sur 4.1.2 (2ème clause).

2) Si a $\in \mathscr{A}(M)$, alors il existe N tel que $M \overset{*}{\to} N$ et $a = \omega(N)$. Donc $C[M] \overset{*}{\to} C[N]$ et $C[M] \equiv C[N]$ par 4.1. Or a est obtenu de N en substituant quelques sous-expressions de N par Ω. Donc $C[a] \sqsubseteq C[N]$ par 4.1.2 (2ème clause). D'où $C[a] \sqsubseteq C[M]$.

3) Comme $\mathscr{A}(M)$ et $\bar{\mathscr{A}}(M)$ sont dirigés, les ensembles $\{C[a] \mid a \in \mathscr{A}(M)\}$ et $\{C[a] \mid a \in \bar{\mathscr{A}}(M)\}$ sont dirigés en se servant de la première clause. Leurs limites existent donc, puisque $\bar{\mathscr{N}}$ est complet. Leurs limites sont trivialement égales et cette limite est inférieure à $C[M]$, puisque la deuxième clause indique que $C[M]$ est un majorant de ces ensembles. □

La démarche est à présent claire. On veut montrer que $M \sqsubseteq N$ implique $C[M] \sqsubseteq C[N]$ pour tout contexte $C[\ ]$. Or le lemme précédent nous permet d'aboutir à

$$\bigsqcup\{C[a] \mid a \in \bar{\mathscr{A}}(M)\} \sqsubseteq \bigsqcup\{C[b] \mid b \in \bar{\mathscr{A}}(N)\} \sqsubseteq C[N]$$

Il suffit donc de montrer que l'on a aussi

$$C[M] \sqsubseteq \bigsqcup\{C[a] \mid a \in \bar{\mathscr{A}}(M)\}$$

autrement dit que $C[M] \equiv \bigsqcup\{C[a] \mid a \in \bar{\mathscr{A}}(M)\}$ en vertu du lemme précédent. Cette équation peut être considérée comme une version syntaxique de la continuité introduite par Scott [37]. Intuitivement, on se demande donc si l'information contenue dans C[M] est entièrement donnée par les approximations (finies) de M et donc si l'opération "contexte" est continue.

L'inégalité précédente consiste donc à démontrer que, pour tout $b \in \bar{\mathcal{A}}(C[M])$, il existe un $a \in \bar{\mathcal{A}}(M)$ tel que $b \sqsubseteq C[a]$. Il existe deux manières de le démontrer. La première due à Wadsworth [46] est directe et utilise des réductions gauches en utilisant la proposition 2.4.4. La deuxième technique due à Welch [48] montre plus et utilise les réductions fonctionnant de l'intérieur vers l'extérieur. Nous avons proposé une démonstration simple du théorème de Welch dans [23]. Nous la reformulons en la connectant au théorème des développements finis généralisés du chapitre II.

<u>4.2.2. Définition</u> (Welch [47]) : La réduction

$$C[M] = P_0 \xrightarrow{R_1} P_1 \xrightarrow{R_2} P_2 \dots \xrightarrow{R_n} P_n = P$$

ne développe pas M ssi, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on n'a pas $R_i \in R/\mathcal{D}_{i-1}$ où R est un radical interne à M dans C[M] et $\mathcal{D}_i$ la réduction $P_0 \xrightarrow{R_1} P_1 \xrightarrow{R_2} P_2 \dots \xrightarrow{R_i} P_i$. Nous notons $C[M] \overset{*}{\underset{M}{\rightarrow}} P$ une telle réduction.

Une telle réduction n'a donc pas le droit de contracter les résidus des radicaux qui sont au départ dans la sous-expression qu'elle ne doit pas développer. De la même manière, nous introduisons la définition suivante.

<u>4.2.3. Définition</u> : Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de radicaux de M, la réduction

$$M = M_0 \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} M_2 \dots \xrightarrow{R_n} M_n = N$$

ne développe pas $\mathcal{F}$ ssi, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on n'a pas $R_i \in R/\mathcal{D}_{i-1}$ et $R \in \mathcal{F}$ où $\mathcal{D}_i$ est la réduction $M_0 \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} M_2 \dots \xrightarrow{R_i} M_i$. Et nous écrirons $M \overset{*}{\underset{\mathcal{F}}{\rightarrow}} N$.

4.2.4. Notation : Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de radicaux de M, nous notons M $[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ l'expression obtenue en substituant les radicaux de $\mathcal{F}$ par l'expression Ω.

Remarquons qu'il suffit de substituer les radicaux les plus externes de $\mathcal{F}$. D'autre part, si $\mathcal{F}$ est l'ensemble de tous les radicaux de M, alors on a $M\,[\mathcal{F}\backslash\Omega] \overset{*}{\underset{\omega}{\to}} \omega(M)$ d'après la définition 2.1.

4.2.5. Lemme : Si $\mathcal{D}$ est une réduction $M \overset{*}{\underset{\mathcal{F}}{\to}} N$, alors $M\,[\mathcal{F}\backslash\Omega] \overset{*}{\to} N\,[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$ où $\mathcal{F}' = \mathcal{F}/\mathcal{D}$ est l'ensemble des résidus de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{D}$.

Démonstration : Par récurrence sur la longueur $|\mathcal{D}|$ de $\mathcal{D}$. Le cas $|\mathcal{D}| = 0$ est trivial. On se ramène donc au cas $|\mathcal{D}| = 1$. Donc $M \overset{R}{\to} N$ et $R \notin \mathcal{F}$. Si R est complètement disjoint de $\mathcal{F}$, le lemme est trivial. Si R est contenu dans un radical S de $\mathcal{F}$. Nous pouvons toujours supposer que $S = (\lambda y{\cdot}C)D$ est un des radicaux les plus externes de $\mathcal{F}$. Alors S a un résidu unique $S' = (\lambda y{\cdot}C')D'$ dans N et le contractum R' de R est contenu dans S'. Comme S devient Ω dans M $[\mathcal{F}\backslash\Omega]$, alors S' devient aussi Ω dans M $[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$. Donc $M\,[\mathcal{F}\backslash\Omega] = M\,[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$. Si R contient un radical S qui est un des plus externes dans $\mathcal{F}$, si $R = ((\lambda x{\cdot}A)B)$, alors S est dans A ou B. Alors R a un résidu unique R' dans M $[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ et $R' = ((\lambda x{\cdot}A\,[\mathcal{F}_1\backslash\Omega])B[\mathcal{F}_2\backslash\Omega])$ où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ contenus dans A et B. Alors si $M\,[\mathcal{F}\backslash\Omega] \overset{R'}{\to} N'$, alors on a aisément $N' = N\,[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$. □

4.2.6. Lemme : Si $C[M] \overset{*}{\underset{M}{\to}} N$, alors $\omega(N) \sqsubseteq C[\omega(M)]$.

Démonstration : Soit $\mathcal{D}$ la réduction considérée entre C[M] et N et soient $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les radicaux de M dans C[M] et $\mathcal{F}' = \mathcal{F}/\mathcal{D}$. Par le lemme précédent, on a $C[M]\,[\mathcal{F}\backslash\Omega] \overset{*}{\to} N[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$. Donc $C[M]\,[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv N[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$ par 4.1.1. Or, par 4.1.2, on a $\omega(N) \sqsubseteq N\,[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$. De plus, comme $C[M]\,[\mathcal{F}\backslash\Omega] \overset{*}{\underset{\omega}{\to}} C[\omega(M)]$, on a $C[M][\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv C[\omega(M)]$ par 4.1.6. En résumé, on a $\omega(N) \sqsubseteq C[\omega(M)]$. □

4.2.7. <u>Proposition</u> : Si $C[M] \xrightarrow{*} P$, alors il existe N et Q tels que $C[M] \xrightarrow{*} C[N] \overset{*}{\underset{N}{\not\to}} Q$ et $P \xrightarrow{*} Q$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathscr{D}$ la réduction $C[M] \xrightarrow{*} P$ considérée. Nous utilisons le théorème des développements finis généralisés de II.4.4.6. Nous savons que toutes les réductions relatives à $\mathscr{D}$ se terminent sur une même expression Q. Considérons une réduction complète relative à $\mathscr{D}$ qui commence par contracter systématiquement des radicaux internes à M. Cette réduction est donc de la forme $C[M] \xrightarrow{*} C[N] \xrightarrow{*} Q$. Nous affirmons que la deuxième partie de cette réduction est de la forme $C[N] \overset{*}{\underset{N}{\not\to}} Q$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait contracté entre C[N] et Q un radical R résidu d'un radical S interne à N dans C[N]. Donc R et S sont dans une même famille (en oubliant incorrectement de préciser les réductions qui sont bien évidentes ici). Comme R est dans une même famille qu'un des radicaux contractés par $\mathscr{D}$, le radical S est aussi dans cette famille. Il restait donc un radical contractable dans N et on n'avait pas fini d'épuiser les radicaux de N de même famille que ceux contractés par $\mathscr{D}$. Donc $C[N] \overset{*}{\underset{N}{\not\to}} Q$. De plus, comme $\mathscr{D}$ est une réduction relative à $\mathscr{D}$ particulière, on a $P \xrightarrow{*} Q$ par II.4.4.6. □

4.2.8. <u>Proposition</u> : Pour tout contexte C [ ] et toute expression M, on a

1) pour tout $b \in \bar{\mathscr{A}}(C[M])$, il existe $a \in \bar{\mathscr{A}}(M)$ tel que $b \sqsubseteq C[a]$

2) $C[M] \equiv \bigsqcup\{C[a] \mid a \in \mathscr{A}(M)\}$

<u>Démonstration</u> : Si $b \in \bar{\mathscr{A}}(C[M])$, il existe P tel que $C[M] \xrightarrow{*} P$ et $b \le \omega(P)$. Or, par 4.2.7., il existe N et Q tels que $M \xrightarrow{*} N$, $C[N] \overset{*}{\underset{N}{\not\to}} Q$ et $P \xrightarrow{*} Q$. Par 2.3.2., on a $\omega(P) \le \omega(Q)$ et, par 4.2.6, on a $\omega(Q) \sqsubseteq C[\omega(N)]$. Or, comme $M \xrightarrow{*} N$, on a $\omega(N) \in \bar{\mathscr{A}}(M)$. Donc, comme $C[M] \equiv \bigsqcup\{b \mid b \in \bar{\mathscr{A}}(C[M])\}$, on a $C[M] \sqsubseteq \bigsqcup\{C[a] \mid a \in \bar{\mathscr{A}}(M)\}$. Finalement, par 4.2.1., on a $C[M] \equiv \bigsqcup\{C[a] \mid a \in \bar{\mathscr{A}}(M)\}$. □

4.2.9. Proposition : Si M $\sqsubseteq$ N, alors C[M] $\sqsubseteq$ C[N] pour tout contexte C[ ] .

Démonstration : Faite dans la discussion qui suit 4.2.1 en se servant donc de 4.2.1 et 4.2.8. □

4.2.10. Théorème : La relation $\sqsubseteq$ définit une sémantique monotone du λ-calcul.

Démonstration : En réunissant 4.1.1 et 4.2.9. □

Avant de discuter plus en détail de la sémantique $\sqsubseteq$, nous signalons quelques propriétés supplémentaires.

4.3. Réductions de l'intérieur vers l'extérieur

Welch[47] a ramené la proposition 4.2.7 à une formulation particulièrement élégante qu'il démontre et que nous redémontrons de la même manière qu'en 4.2.7.

4.3.1. Définition : La réduction $M = M_0 \xrightarrow{R_1} M_1 \xrightarrow{R_2} M_2 \ldots \xrightarrow{R_n} M_n = N$ est une *réduction de l'intérieur vers l'extérieur*, et nous écrirons $M \overset{*}{\underset{ie}{\rightarrow}} N$ ssi pour tous i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$ le radical R_j n'est pas un résidu d'un radical R'_j de M_{i-1} interne à R_i.

Les réductions de l'intérieur vers l'extérieur sont donc duales des réductions standards de 1.4. Nous allons voir qu'il existe un théorème dual du théorème de standardisation sur la complétude de ces réductions.

4.3.2. Théorème

1) Si $M \overset{*}{\rightarrow} N$, alors il existe P tel que $M \overset{*}{\underset{ie}{\rightarrow}} P$ et $N \overset{*}{\rightarrow} P$,

2) Pour tout $\mathcal{D}$, il existe $\mathcal{D}_{ie}$ de l'intérieur vers l'extérieur tel que $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}_{ie}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{D}$ la réduction $M \overset{*}{\rightarrow} N$. Par le théorème des développements finis généralisés de II.4.4.6., toutes les réductions relatives à $\mathcal{D}$ se terminent sur une même expression P. On peut toujours prendre une réduction relative complète $\mathcal{D}_{ie}$ qui contracte toujours les radicaux les plus internes qui sont de même famille que ceux contractés par $\mathcal{D}$. Nous affirmons que cette réduction est de l'intérieur vers l'extérieur. En effet, si ce n'était pas le cas, cette réduction serait de la forme :

$$M = P_0 \overset{S_1}{\rightarrow} P_1 \overset{S_2}{\rightarrow} P_2 \ldots \overset{S_m}{\rightarrow} P_m = P$$

et, pour $1 \leq i < j \leq n$, on aurait S_j résidu d'un radical S_j' interne à S_i. Or (à nouveau sans préciser les réductions qui apparaissent clairement), le radical S_j' est dans la même famille que S_j qui lui est dans une des familles des radicaux contractés par $\mathcal{D}$. Donc S_i contenait un radical S_j' contractable dans l'espace des réductions relatives à $\mathcal{D}$. D'où une contradiction. Donc $\mathcal{D}_{ie}$ est de l'intérieur vers l'extérieur. Or $\mathcal{D}$ est une réduction relative particulière et donc $N \overset{*}{\rightarrow} P$ par II.4.4.6. Ce théorème indique aussi que l'on a $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}_{ie}$ en utilisant II.2.2.7. □

En fait, et ceci nous a été suggéré par R. Hindley, on montre de la même manière que si $M \overset{*}{\rightarrow} N$ et si $M \overset{*}{\rightarrow} P$, alors il existe un Q tel que $N \overset{*}{\underset{ie}{\rightarrow}} Q$ et $P \overset{*}{\underset{ie}{\rightarrow}} Q$.

<u>4.4. - Stabilité de l'interprétation</u>

Nous montrons que notre sémantique est stable dans le sens de Berry [6] qui interprète cette propriété comme un aspect séquentiel de l'interprétation. Berry montre cette propriété dans le cas du langage LCF de Milner [25] (voir Berry [7]). Nous adaptons cette démonstration au cas du λ-calcul. Nous utilisons une notation vectorielle pour les contextes et

$C[\vec{M}]$ remplace donc $C[M_1, M_2, \ldots M_n]$ où $n \geq 0$. Et nous étendons cette notation à $\vec{M} \sqsubseteq \vec{N}$, à $\vec{M} \cap \vec{N}$, ... dont les sens sont évidents (voir 3.1.4 pour $\cap$). De plus, si $I \in \bar{\mathcal{I}}$, nous poserons $C[I] \equiv \bigsqcup\{C[a] | a \in I\}$, ce qui est cohérent par 4.2.8 et 4.2.1 avec le cas où I est définissable, c'est-à-dire quand $I = \bar{\mathcal{A}}(M)$ pour un certain M de Λ. Si $I_1, I_2, \ldots I_n$ sont dans $\bar{\mathcal{I}}$, alors on écrira aussi $C[\vec{I}]$.

Le premier lemme est adapté de Plotkin [34].

<u>4.4.1. Lemme</u> : Si, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $M_i \equiv \Omega$ ou $N_i \equiv \Omega$, alors $C[\vec{M}] \cap C[\vec{N}] \equiv C[\vec{\Omega}]$.

<u>Démonstration</u> : D'abord, comme $\vec{\Omega} \sqsubseteq \vec{M}$ et $\vec{\Omega} \sqsubseteq \vec{N}$, on a $C[\vec{\Omega}] \sqsubseteq C[\vec{M}]$ et $C[\vec{\Omega}] \sqsubseteq C[\vec{N}]$ par le théorème 4.2.10. Donc $C[\vec{\Omega}] \sqsubseteq C[\vec{M}] \cap C[\vec{N}]$. Réciproquement, si a est une approximation (généralisée) de $C[\vec{M}]$ et de $C[\vec{N}]$, nous voulons montrer que a est aussi une approximation de $C[\vec{\Omega}]$. Nous raisonnons par récurrence sur $\langle Dfnt_a(C[\vec{M}]), ||C[\vec{M}]|| \rangle$ (voir 2.4.5).

<u>Cas 1</u> : $a = \Omega$. Alors on a trivialement $a \in \bar{\mathcal{A}}(C[\vec{\Omega}])$.

<u>Cas 2</u> : $a \neq \Omega$. Alors $a = \lambda\vec{x}\cdot x\vec{a}$ et $C[\vec{M}]$ et $C[\vec{N}]$ ont une f.n.t. Nous allons voir que, comme $M_i \equiv \Omega$ ou $N_i \equiv \Omega$ pour tout i, alors $C[\vec{\Omega}]$ a aussi une f.n.t. Nous avons plusieurs cas selon la forme de C[ ].

<u>Cas 2.1</u> : $C[\ ] = \lambda\vec{x}\cdot x\,\vec{C}[\ ]$. Alors on raisonne aisément par récurrence sur $||C[\vec{M}]||$.

<u>Cas 2.2</u> : $C[\ ] = \lambda\vec{z}\cdot[\ ]\vec{C}[\ ]$. Alors on a $C[\vec{M}] = \lambda\vec{z}\cdot M_i\,\vec{C}[\vec{M}]$ et $C[\vec{N}] = \lambda\vec{z}\cdot N_i\,\vec{C}[\vec{N}]$ où les écritures $\vec{C}[\vec{M}]$ et $\vec{C}[\vec{N}]$ sont un peu incorrectes, mais ont un sens intuitif évident. Or on a $M_i \equiv \Omega$ ou $N_i \equiv \Omega$. Supposons par exemple $M_i \equiv \Omega$. Alors $C[\vec{M}] \equiv \lambda\vec{z}\cdot\Omega\vec{C}[\vec{M}] \xrightarrow[\omega]{*} \Omega$ en se servant de 4.2.10. Donc, par 4.1.6, on a $C[\vec{M}] \equiv \Omega$ et donc $C[\vec{M}]$ n'a pas de f.n.t., ce qui est impossible puisque $a \neq \Omega$ est une approximation de $C[\vec{M}]$.

<u>Cas 2.3</u> : $C[\ ] = \lambda\vec{z}\cdot(\lambda y\cdot A[\ ])\ B[\ ]\vec{C}[\ ]$. Alors $C[\vec{M}]$ et $C[\vec{N}]$ ne sont pas en f.n.t et $\omega(c[\vec{M}]) = \omega(C[\vec{N}]) = \Omega$. Donc

$$C[\vec{M}] \to \lambda\vec{z}\cdot A[\vec{P}][y\backslash B[\vec{Q}]]\vec{C}[\vec{R}] \quad = C'[\vec{M}']$$

$$C[\vec{N}] \to \lambda\vec{z}\cdot A[\vec{S}][y\backslash B[\vec{T}]]\vec{C}[\vec{U}] \quad = C'[\vec{N}']$$

où, pour tout M'_j et N'_j, on a $M'_j = M_j$ ou $M'_j = M_j[y\backslash X]$ et $N'_j = N_j$ ou $N'_j = N_j[y\backslash Y]$ avec X et Y donnés par les deux réductions précédentes. Or, comme $\Omega[y\backslash X] = \Omega$ et $\Omega[y\backslash Y] = \Omega$ puisque $\Omega = \Delta\Delta$ et $\Delta = \lambda x\cdot xx$, on a $M'_j \equiv \Omega$ ou $N'_j \equiv \Omega$ pour tout j en utilisant 4.2.10. De plus, par 2.4.4, l'approximation a approxime aussi $C'[\vec{M}']$ et $C'[\vec{N}']$. En outre, on a $Dfnt_a(C'[\vec{M}']) < Dfnt_a(C[\vec{M}])$. Donc $a \in \bar{\mathcal{A}}(C'[\vec{\Omega}])$ par récurrence. Et, comme $C[\vec{\Omega}] \to C'[\vec{\Omega}]$, on a aussi $a \in \bar{\mathcal{A}}(C[\vec{\Omega}])$ par 4.1.1. □

<u>4.4.2. Définition</u> : Deux idéaux I et I' de $\mathcal{N}$ sont *compatibles*, et nous écrirons $I \uparrow I'$, ssi il existe $I'' \in \bar{\mathcal{N}}$ tel que $I \sqsubseteq I''$ et $I' \sqsubseteq I''$.

Nous avons donc $M \uparrow M'$ ssi $\bar{\mathcal{A}}(M) \uparrow \bar{\mathcal{A}}(M')$ et nous adoptons aussi la notation vectorielle $\vec{I} \uparrow \vec{I}'$ et $\vec{M} \uparrow \vec{M}'$ dont les sens sont immédiats.

<u>4.4.3. Proposition</u> :

1) Si $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{N}}$ et si $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, alors $C[\vec{a}] \cap C[\vec{b}] \equiv C[\vec{a} \cap \vec{b}]$

2) Si $\vec{I}, \vec{I}' \in \vec{\bar{\mathcal{N}}}$ et si $\vec{I} \uparrow \vec{I}'$, alors $C[\vec{I}] \cap C[\vec{I}'] \equiv C[\vec{I} \cap \vec{I}']$

3) Si $\vec{M} \uparrow \vec{N}$, alors $C[\vec{M}] \cap C[\vec{N}] \equiv C[\vec{M} \cap \vec{N}]$.

<u>Démonstration</u>

1) Par récurrence sur $||\vec{a} \cap \vec{b}||$. Si $\vec{a} \cap \vec{b} = \vec{\Omega}$, alors comme $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, on a $a_i = \Omega$ ou $b_i = \Omega$ pour tout i. On applique donc 4.4.2. Sinon, on a immédiatement le résultat par récurrence.

2) On se sert de la continuité de $\cap$ dans $\bar{\mathcal{N}}$.

3) On applique la clause précédente grâce à 4.2.8. □

4.4.4. Proposition

1) Pour tout $b \in \mathcal{A}(C[\vec{M}])$, il existe un plus petit $\vec{a}$ dans $\mathcal{A}(\vec{M})$ tel que $b \sqsubseteq C[\vec{a}]$.

2) Pour tout $b \in \bar{\mathcal{A}}(C[\vec{M}])$, il existe un plus petit $\vec{a}$ dans $\bar{\mathcal{A}}(\vec{M})$ tel que $b \sqsubseteq C[\vec{a}]$.

Démonstration

1) Par plusieurs applications de 4.2.8., on sait qu'il existe au moins un $\vec{a}$ dans $\mathcal{A}(\vec{M})$ tel que $b \sqsubseteq C[\vec{a}]$. Supposons qu'il existe un autre $\vec{c}$ dans $\mathcal{A}(\vec{M})$ tel que $b \sqsubseteq C[\vec{c}]$. Par 2.3.3., on a $\mathrm{Min}(\vec{a}, \vec{c}) \in \mathcal{A}(\vec{M})$ et $\vec{a} \uparrow \vec{c}$. Donc la proposition précédente entraîne $b \sqsubseteq C[\mathrm{Min}(\vec{a}, \vec{c})]$. Comme $\mathcal{N}$ est bien fondé (voir 2.2.5), il existe donc un $\vec{a}$ minimum dans $\mathcal{A}(\vec{M})$ vérifiant $b \sqsubseteq C[\vec{a}]$.

2) Même démonstration. □

4.4.5. Définition : Une *section supérieure* de $\bar{\mathcal{N}}$ (voir Kahn [20]) est un sous-ensemble S de $\bar{\mathcal{N}}$ tel que $S = \{I \mid I' \subset I\}$ pour un $I' \in \bar{\mathcal{N}}$.

4.4.6. Proposition

Pour tout contexte $C[\ ]$ et pour tout I' de $\bar{\mathcal{N}}$, l'ensemble $\{\vec{I} \mid I' \sqsubseteq C[\vec{I}]\}$ est une union de sections supérieures disjointes de $\vec{\bar{\mathcal{N}}}$.

Démonstration :

1) Si I' est d'information finie, c'est-à-dire $I' \equiv b$ pour un b de $\mathcal{N}$, alors tout point $\vec{I}$ tel que $b \sqsubseteq C[\vec{I}]$ admet une approximation $\vec{a}$ telle que $\vec{a} \sqsubseteq \vec{I}$ et $b \sqsubseteq C[\vec{a}]$ par 4.2.8. Or, comme tout point de $\mathcal{N}$ n'est minoré que

par des points de $\mathcal{N}$, et comme $\mathcal{N}$ est bien fondé, il existe dans $\vec{\mathcal{N}}$ des points $\vec{a}$ minimaux qui sont en fait des points de $\vec{\mathcal{N}}$ tels que b $\sqsubseteq$ C[$\vec{a}$]. Soit $\vec{c}$ un autre point minimal compatible avec $\vec{a}$. Alors, par 4.4.3., on a
b $\sqsubseteq$ C[$\vec{a}$] $\cap$ C[$\vec{c}$] $\equiv$ C[Min($\vec{a}$, $\vec{c}$)]. Comme $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont minimum, on a
$\vec{a}$ = Min($\vec{a}$, $\vec{c}$) = $\vec{c}$.

2) Si I' est d'information infinie, on fonctionne par continuité à partir du cas précédent. □

Donc le λ-calcul ne contient pas d'expressions dont le mécanisme d'évaluation soit "parallèle". Par exemple, il n'existe pas d'expression M telle que M I I' $\equiv$ I $\cup$ I' pour tout I et I' de $\vec{\mathcal{N}}$.

5) CONNEXION AVEC LES AUTRES SEMANTIQUES DU λ-CALCUL

5.1. Aspect minimal de la sémantique $\sqsubseteq$

Nous reprenons ce que fait Welch [48]. Intuitivement, pour définir $\sqsubseteq$, nous avons fait un nombre minimal d'hypothèses. Nous avons supposé $\Delta\Delta = \Omega \sqsubseteq M$ pour toute expression M, si $\Delta = \lambda x \cdot xx$, et que toute expression est interprétée comme limite de ses approximations.

5.1.1. Définition : Une relation $\sqsubseteq'$ *sémantique* monotone (croissante) est *continue par rapport à ses approximations* ssi

1) $\Omega \sqsubseteq' M$ pour toute expression M de Λ.

2) $M \equiv' \bigsqcup' \mathcal{A}(M)$ pour toute expression M de Λ, c'est-à-dire que M est le plus petit commun majorant de l'ensemble $\mathcal{A}(M)$ de ses approximations, modulo l'équivalence $\equiv'$ induite par $\sqsubseteq'$.

5.1.2. Proposition : La sémantique $\sqsubseteq$ est la plus petite sémantique monotone continue par rapport à ses approximations.

Démonstration : D'abord, on a $\Omega \sqsubseteq M$ et $M \equiv \bigsqcup \mathcal{A}(M)$ pour tout M. Donc, la relation $\sqsubseteq$ est une sémantique monotone continue par rapport à ses approximations. Considérons à présent une autre telle relation $\sqsubseteq'$. Nous voulons montrer que $M \sqsubseteq N$ implique $M \sqsubseteq' N$ pour tout M et N de Λ. Considérons d'abord les expressions d'information finie. Si a et b sont dans $\mathcal{N}$ et $a \sqsubseteq b$, on a soit $a = \Omega$ et alors $\Omega \sqsubseteq' b$, soit $a \neq \Omega$ et alors $a \sqsubseteq' b$ par récurrence sur la taille de a puisque $M \sqsubseteq' N$ implique $C[M] \sqsubseteq' C[N]$ pour tout contexte $C[\ ]$ et tout M et N de Λ. Supposons à présent que l'on ait $M \sqsubseteq N$. Par définition, on a donc $\bigsqcup \mathcal{A}(M) \sqsubseteq \bigsqcup \mathcal{A}(N)$. Comme le préordre $\sqsubseteq$ est contenu dans $\sqsubseteq'$ sur $\mathcal{N}$ et comme les ensembles $\mathcal{A}(M)$ et $\mathcal{A}(N)$ ont des plus petits communs majorants, on a $\bigsqcup' \mathcal{A}(M) \sqsubseteq' \bigsqcup' \mathcal{A}(N)$. Donc $M \sqsubseteq' N$ puisque $M \equiv' \bigsqcup' \mathcal{A}(M)$ et $N \equiv' \bigsqcup' \mathcal{A}(N)$. □

On retrouve donc un résultat similaire à celui de Courcelle-Nivat [13] obtenu pour les programmes récursifs. Il semble possible d'obtenir un résultat encore plus proche en introduisant les λ-algèbres (voir Barendregt [3]). Par ailleurs, les modèles $P\omega$ et D_∞ de Scott [37,38] définissent des relations sémantiques continues par rapport à leurs approximations (voir Hyland [19] et Wadsworth [44]).

5.2. Expressions solvables

Nous complétons la proposition 1.10.7.

5.2.1. Proposition : Une expression M est solvable ssi M a une f.n.t ssi $M \not\equiv \Omega$.

Démonstration : Nous avons déjà vu en 3.2.3 que $M \equiv \Omega$ ssi M n'a pas de f.n.t. D'autre part, en 1.10.7, nous avons que si M a une f.n.t, alors M est solvable. Supposons à présent que $M \equiv \Omega$. Alors, par 4.2.10, on a $C[M] \sqsubseteq C[N]$ pour toute expression M. Donc, si C[M] a une forme normale, alors, par 3.2.3, l'expression C[N] a aussi une forme normale (identique). Donc il n'existe pas de contexte strict C[ ] (voir 1.9) tel que C[M] a une forme normale.□

Intuitivement, cette proposition est intéressante car elle montre que le calcul d'une expression non solvable plongée dans un contexte ne s'arrête que pour les contextes indépendants de leur argument. Une autre manière de le voir est de reprendre la définition de Barendregt [1] et nous allons voir qu'une expression non solvable est indéfinie en tant qu'objet, mais aussi en tant que fonction.

5.2.2. Définition : Une *expression* M est *close* ssi elle ne contient pas de variables libres. Donc VARLIB(M) = $\emptyset$ (voir chapitre I).

5.2.3. Définition : Une expression M est *interconvertible* avec une autre expression N et nous écrivons $M =_\beta N$ ssi $M \overset{*}{\rightarrow} N$ ou $N \overset{*}{\rightarrow} M$ ou s'il existe P tel que $M =_\beta P$ et $P =_\beta N$.

5.2.4. Notation : Nous écrivons $M\vec{N}$ à la place de $M\,N_1N_2\ldots N_n$ où $n \geq 0$ et $N_1,N_2,\ldots N_n$ sont dans Λ.

5.2.5. Proposition : M est solvable ssi $\lambda x\cdot M$ est solvable. Et si M est une expression close, alors les quatre clauses suivantes sont équivalentes :

1) M est solvable.

2) $\exists\vec{N}$ tel que $M\vec{N}$ a une forme normale.

3) $\exists\vec{N}$ tel que $M\vec{N} =_\beta I = \lambda x\cdot x$

4) $\forall P\cdot\exists\vec{N}$ tel que $M\vec{N} =_\beta P$

Démonstration : Comme M a une f.n.t. ssi $\lambda x\cdot M$ a une f.n.t., on a M solvable ssi $\lambda x\cdot M$ est solvable par 5.2.1. Supposons à présent M clos. Si M n'est pas solvable, alors $M \equiv \Omega$ par 5.2.1. et donc, pour tout $\vec{N}$, on a $M\vec{N} \equiv \Omega\vec{N} \overset{*}{\underset{\omega}{\rightarrow}} \Omega$. Par 4.1.6., on a $M\vec{N} \equiv \Omega$ et donc $M\vec{N}$ n'a pas de forme normale. Si M est solvable, alors M a une f.n.t. Donc $\overset{*}{\rightarrow} \lambda x_1x_2\ldots x_m\cdot x_i\ M_1M_2\ldots M_n$ où $1 \leq i \leq m$ puisque M est clos. Si $N_i = (\lambda y_1y_2\ldots y_n\cdot I)$ et $I = \lambda x\cdot x$, on a $M\,N_1N_2\ldots N_n \overset{*}{\rightarrow} I$. Donc 1 et 2 sont équivalents et 1 entraîne 3. Or 3 implique 2 trivialement et 3 et 4 sont aussi clairement équivalents, puisque $IN \overset{*}{\rightarrow} N$ pour tout N.□

Cette proposition est dans Barendregt [3]. De manière plus étonnante, cette proposition est aussi vraie dans le λI-calcul (voir Barendregt [2] et Klop [11]) et alors M est solvable ssi M a une forme normale (voir 1.7).

Finalement, nous faisons quelques remarques sur la validité des ω-règles (voir 4.1.6). Pour toute sémantique $\sqsubseteq'$ monotone, si nous voulons un élément minimal Ω, alors on a $\Omega M \equiv' \Omega$ pour tout M. En effet $\Omega \sqsubseteq' \lambda x\cdot\Omega$. Donc $\Omega\,M \sqsubseteq'(\lambda x\cdot\Omega)M$ et comme $(\lambda x\cdot\Omega)M \overset{*}{\rightarrow} \Omega$ on a $(\lambda x\cdot\Omega)\,M \equiv' \Omega$. Mais il est beaucoup moins clair d'imposer $\lambda x\cdot\Omega \equiv' \Omega$. En effet, on aurait pu très bien faire toute notre construction en supposant le contraire et aurait obtenu une relation sémantique monotone distinguant $\lambda x\cdot\Omega$ et Ω(voir Lévy [24]).

5.3. Aspect extensionnel de $\sqsubseteq$:

D'abord, la relation $\equiv$ n'est pas extensionnelle au sens des fonctions (voir 1.5) puisque $xM \equiv (\lambda y\cdot xy)M$ pour toute expression M et pourtant $x \not\equiv \lambda y\cdot xy$. On peut donc se demander s'il existe une sémantique opérationnelle extensionnelle simple correspondant à la relation $\sqsubseteq$.

Nous reprenons une définition de Milner [26].

5.3.1. Définition : Une relation $\sqsubseteq$ sémantique monotone est *adéquate* par rapport à une sémantique opérationnelle extensionnelle $\sqsubseteq_{op}$ ssi $\sqsubseteq$ est contenue dans $\sqsubseteq_{op}$. On dit aussi que $\sqsubseteq$ est *complètement abstraite* par rapport à $\sqsubseteq_{op}$ ssi $\sqsubseteq$ et $\sqsubseteq_{op}$ sont équivalents.

5.3.2. Notation : Conformément au § 1, nous considérons les relations opérationnelles suivantes :

$M \lesssim N$ si M n'est pas en f.n.t.

$M \lesssim N$ si M et N sont en f.n.t et $M \simeq N$ (voir 1.10.2)

$M \le_{norm} N$ si M n'est pas en forme normale

$M \le_{norm} M$ si M est en forme normale

$M \lesssim^* N$ ssi $\forall M'$ tel que $M \xrightarrow{*} M'$, $\exists N'$ tel que $N \xrightarrow{*} N'$ et $M' \lesssim N'$

$M \le^*_{norm} N$ ssi $\forall M'$ tel que $M \xrightarrow{*} M'$, $\exists N'$ tel que $N \xrightarrow{*} N'$ et $M' \le_{norm} N'$

$M \sqsubseteq_{\sim} N$ ssi $\forall C[\;]$. $C[M] \lesssim^* C[N]$

$M \sqsubseteq_{norm} N$ ssi $\forall C[\;]$. $C[M] \le^*_{norm} C[N]$

5.3.3. Proposition : $\sqsubseteq$ est adéquate par rapport à $\sqsubseteq_{\sim}$ et $\sqsubseteq_{norm}$.

Démonstration : Si $M \sqsubseteq N$, alors $C[M] \sqsubseteq C[N]$ pour tout contexte $C[\ ]$ par 4.2.10. Donc par 3.2.3, on a $C[M] \lesssim^* C[N]$ et $C[M] \leq^*_{norm} C[N]$. □

Nous adaptons à présent un lemme de Milner [26] en utilisant une notation vectorielle $M\vec{P}$ qui sera une abréviation de $M\, P_1 P_2 \ldots P_n$ où $n \geq 0$.

5.3.4. Lemme : Soient M et N deux expressions closes. Alors :

1) $M \underset{\sim}{\sqsubseteq} N$ ssi $M\vec{P} \lesssim^* N\vec{P}$ pour tout $\vec{P}$

2) $M \sqsubseteq_{norm} N$ ssi $M\vec{P} \leq^*_{norm} N\vec{P}$ pour tout $\vec{P}$

Démonstration

1) Si $M \underset{\sim}{\sqsubseteq} N$, alors $M\vec{P} \lesssim^* N\vec{P}$ pour tout $\vec{P}$ en considérant le contexte $C[\ ] = [\ ]\vec{P}$. Réciproquement, supposons $M\vec{P} \lesssim^* N\vec{P}$ pour tout $\vec{P}$. Nous allons montrer que l'on a $C[\vec{M}] \lesssim^* C[\vec{N}]$ pour tout contexte $C[\ ]$ à n trous où $C[\vec{M}]$ et $C[\vec{N}]$ représentent les expressions $C[M,M,\ldots M]$ et $C[N,N,\ldots N]$. Si $C[\vec{M}]$ n'a pas de f.n.t., alors $C[\vec{M}] \lesssim^* C[\vec{N}]$ trivialement. Supposons donc que $C[\vec{M}]$ a une f.n.t. Nous montrons que l'on a aussi $C[\vec{M}] \lesssim^* C[\vec{N}]$ par récurrence sur $\langle Dfnt(C[\vec{M}]), n \rangle$ où Dfnt est définie en 2.4.5 et n est le nombre de trous du contexte $C[\ ]$. Comme en 4.4.1, le contexte $C[\ ]$ ne peut être que de l'une des trois formes suivantes.

Cas 1 : $C[\ ] = \lambda\vec{x}.(\lambda x{\cdot}A[\ ])\, B[\ ]\, \vec{C}[\ ]$. Alors on a

$$C[\vec{M}] \to \lambda\vec{x}{\cdot}A[\vec{M}][x\backslash B[\vec{M}]]\vec{C}[\vec{M}] = C'[\vec{M}]$$

$$C[\vec{N}] \to \lambda\vec{x}{\cdot}A[\vec{N}][x\backslash B[\vec{N}]]C[\vec{N}] = C'[\vec{N}]$$

car les expressions M et N sont closes et ne contiennent donc pas d'occurrences de la variable substituée. Or par définition, on a $Dfnt(C'[\vec{M}]) < Dfnt(C[\vec{M}])$. Donc $C'[\vec{M}] \lesssim^* C'[\vec{N}]$ par récurrence. Et par conséquent $C[\vec{M}] \lesssim^* C[\vec{N}]$.

Cas 2 : $C[\;] = \lambda\vec{x}\cdot x\ \vec{C}[\;]$. Alors $C[\vec{M}]$ et $C[\vec{N}]$ sont deux f.n.t semblables, c'est-à-dire $C[\vec{M}] \simeq C[\vec{N}]$. Donc $C[\vec{M}] \lesssim^* C[\vec{N}]$.

Cas 3 : $C[\;] = \lambda\vec{x}\cdot[\;]\ \vec{C}[\;]$. Alors $C[\vec{M}] = \lambda\vec{x}\cdot M\vec{C}[\vec{M}]$ et $C[\vec{N}] = \lambda\vec{x}\cdot N\vec{C}[\vec{N}]$. Or, par hypothèse, on a $M\vec{C}[\vec{N}] \lesssim^* N\vec{C}[\vec{N}]$. Donc $\lambda\vec{x}\cdot M\vec{C}[\vec{N}] \lesssim^* \lambda\vec{x}\cdot N\vec{C}[N]$ en appliquant trivialement la définition de $\lesssim^*$. Considérons le contexte à n-1 trous $D[\;] = \lambda\vec{x}\cdot M\vec{C}[\;]$. On a $D[\vec{M}] = C[\vec{M}]$. Donc $Dfnt(D[\vec{M}]) = Dfnt(C[\vec{M}])$. On a donc par récurrence $D[\vec{M}] \lesssim^* D[\vec{N}] = \lambda\vec{x}\cdot M\vec{C}[\vec{N}]$. D'où par transitivité $C[\vec{M}] \lesssim^* C[\vec{N}]$.

2) La démonstration est analogue. La récurrence se fait par récurrence sur $<d(C[\vec{M}]),\ n,\ \|C[\vec{M}]\|>$ où $d(C[\vec{M}])$ est la longueur de la réduction normale de $C[\vec{M}]$ menant à la forme normale, où n est le nombre de trous de $C[\;]$ et où $\|C[\vec{M}]\|$ est la taille de l'expression $C[\vec{M}]$. Nous avons les trois mêmes cas.

Cas 1 : identique au précédent.

Cas 2 : $C[\;] = \lambda\vec{x}\cdot x\ \vec{C}[\;] = \lambda\vec{x}\cdot x\ C_1[\;]\ C_2[\;] \ldots C_p[\;]$. Or, comme $C[\vec{M}]$ a une forme normale, chacun des $C_i[\vec{M}]$ a une forme normale puisque les réductions issues de $C[\vec{M}]$ consistent à réduire indépendamment les $C_i[\vec{M}]$. Donc $d(C_i[\vec{M}]) \leq d(C[\vec{M}])$ pour tout i. De même le nombre n_i de trous de $C_i[\;]$ est tel que $n_i \leq n$. Mais $\|C_i[\vec{M}]\| < \|C[\vec{M}]\|$. Donc par récurrence on a $C_i[\vec{M}] \leq^*_{norm} C_i[\vec{N}]$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq p$. (Remarquons que $p \geq 0$). On a donc $C[\vec{M}] \leq^*_{norm} C[\vec{N}]$ en appliquant la définition de $\leq^*_{norm}$.

Cas 3 : Identique au cas 3 précédent.□

5.3.5. Proposition : La relation $\sqsubseteq$ n'est pas complètement abstraite par rapport à $\underset{\sim}{\sqsubseteq}$ ou $\sqsubseteq_{norm}$.

Démonstration

1) $\sqsubseteq$ ne contient pas $\underset{\sim}{\sqsubseteq}$. Prenons $M = \lambda x\cdot xx$ et $N = \lambda x\cdot x(\lambda y\cdot xy)$. On n'a pas $M \sqsubseteq N$. Pourtant $M \underset{\sim}{\sqsubseteq} N$. En effet, comme M et N sont clos, par le

lemme précédent, il suffit de vérifier $M\vec{P} \lesssim^* N\vec{P}$ pour tout $\vec{P}$. D'abord $M \lesssim^* N$ puisque M et N sont deux f.n.t. semblables. Supposons maintenant que le vecteur $\vec{P}$ ne soit pas vide. On considère donc $MP\vec{Q}$ et $NP\vec{Q}$. Or $MP\vec{Q} \to PP\vec{Q}$ et $NP\vec{Q} \to P(\lambda y{\cdot}Py)\vec{Q}$. Nous raisonnons par cas sur la valeur de P. Si $P \equiv \Omega$, alors $MP\vec{Q} \equiv \Omega\Omega\vec{Q} \equiv \Omega$ par 4.2.10, 4.1.1 et 4.1.6. Donc $MP\vec{Q}$ n'a pas de f.n.t et on a $MP\vec{Q} \lesssim^* NP\vec{Q}$. Si $P \not\equiv \Omega$, alors P a une f.n.t. Nous distinguons le cas où cette f.n.t est une abstraction ou non. Donc si $P \equiv \lambda z{\cdot}P'$, alors $NP\vec{Q} \equiv P(\lambda y(\lambda z{\cdot}P')y)\vec{Q}$ par 4.2.10. Or on peut toujours supposer y non libre dans P par α-conversion. Donc $NP\vec{Q} \equiv P(\lambda y{\cdot}P'[z\backslash y])\vec{Q} = PP\vec{Q} \equiv MP\vec{Q}$ par 4.1.1. D'où $MP\vec{Q} \lesssim^* NP\vec{Q}$ par 5.3.3. Il reste donc le cas où $P \equiv z\vec{A}$, c'est-à-dire où P a une f.n.t qui n'est pas une abstraction. Alors $MP\vec{Q} \equiv z\vec{A}(z\vec{A})\vec{Q}$ et $NP\vec{Q} \equiv z\vec{A}(\lambda y{\cdot}z\vec{A}y)\vec{Q}$ par 4.2.10. Donc $MP\vec{Q} \lesssim^* NP\vec{Q}$ puisque $MP\vec{Q}$ et $NP\vec{Q}$ ont des f.n.t semblables aux deux f.n.t précédentes.

2) $\sqsubseteq$ ne contient pas $\sqsubseteq_{norm}$. Prenons $M = \lambda x{\cdot}xx\Omega$ et $N = \lambda x{\cdot}x(\lambda y{\cdot}xy)\Omega$. Ces deux expressions sont closes et le raisonnement est analogue au précédent. La seule différence est le cas où $P \equiv z\vec{A}$. Alors $MP\vec{Q} \equiv z\vec{A}(z\vec{A})\Omega\vec{Q}$. Donc $MP\vec{Q}$ n'a pas de forme normale puisque sinon $z\vec{A}(z\vec{A})\Omega\vec{Q}$ aurait une forme normale par 3.2.3, ce qui est impossible car Ω n'a pas de forme normale (Rappelons-nous que $\Omega = \Delta\Delta$ et $\Delta = \lambda x{\cdot}xx$). Donc $MP\vec{Q} \leq^*_{norm} NP\vec{Q}$.□

Nous ne sommes donc pas d'accord avec Hyland [19]. Néanmoins, Hyland [13] montre en considérant les arbres infinis correspondant aux λ-expressions que la relation $\equiv$ est équivalente à l'égalité dans le modèle $P\omega$ de Scott [38]. Mais l'inégalité est différente puisque $x \sqsubseteq_{P\omega} \lambda y{\cdot}xy$. Peut-être peut-on espérer que l'inégalité correspond à celle de $T\omega$ (voir Plotkin [35]) ? On peut donc se demander s'il existe une relation opérationnelle extensionnelle simple correspondant à $\sqsubseteq$. Il ne faut certainement pas ajouter la η-règle de conversion (voir chapitre I) car alors les expressions M et N considérées en 5.3.5 coïncident. Peut-être faut-il ajouter des δ-règles (voir Church [11]) encore appelées règles de simplification par Raoult-Vuillemin [43]? Mais il faut faire attention à ne pas avoir une relation correspondant au modèle E_∞ avec atomes (voir Wadsworth[44] p. 84, ex. 2.7.12).

Comme Hyland [19] et Wadsworth [45] l'ont montré, de telles relations extensionnelles existent dès que l'on rajoute la η-règle. Une construction analogue à celle de $\sqsubseteq$ est complètement abstraite par rapport à la relation de Morris [28] qui est analogue à $\sqsubseteq_{norm}$ mais en incluant la η-règle. De même, l'inégalité du modèle D_∞ de Scott [37] correspond à la relation extensionnelle $\sqsubseteq_{fnt}$ définie par $M \sqsubseteq_{fnt} N$ ssi, pour tout $C[\ ]$, si $C[M]$ a une f.n.t, alors $C[N]$ a une f.n.t. Cette propriété est particulièrement intéressante, car elle montre que D_∞ est l'extension maximale cohérente de la relation obtenue en identifiant tous les termes non solvables.

CHAPITRE V

REDUCTIONS CORRECTES, SURES, COMPLETES ET OPTIMALES

Nous adaptons au λ-calcul les résultats de Vuillemin [42,43] obtenus pour les programmes récursifs en reprenant ce qui a été fait et présenté dans Berry-Lévy [8] et Lévy [23] .

1) Réductions correctes - Réductions sûres

1.1. Définitions

Nous avons défini au chapitre précédent la "valeur" d'une λ-expression. Nous pouvons définir de la même manière la valeur calculée par une réduction.

1.1.1. Définition : La *valeur* Val($\mathcal{D}$) *calculée par la réduction* $\mathcal{D}$ finie ou infinie

$$M = M_o \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2 \dots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n \xrightarrow{\mathcal{F}_{n+1}} \dots$$

est définie par

$$\mathrm{Val}(\mathcal{D}) = \bigsqcup_{n\geq 0} \omega(M_i)$$

La valeur calculée par une réduction est donc la limite des approximations directes successives obtenues au cours de la réduction. Remarquons que cette opération limite est bien définie dans $\bar{\mathcal{N}}$ puisque, pour tout i et j tels que $0 \leq i \leq j$, on a $\omega(M_i) \leq \omega(M_j)$ par IV.2.3.2.

1.1.2. Proposition : Pour toute réduction $\mathcal{D}$ issue d'une expression M, on a $\mathrm{Val}(\mathcal{D}) \sqsubseteq M$.

Démonstration : triviale puisque $M \equiv \bigsqcup\{a \mid a \in \mathscr{A}(M)\}$. □

1.1.3. Définition : Une *réduction* $\mathscr{D}$ issue de M est *correcte* ssi $\mathrm{Val}(\mathscr{D}) \equiv M$.

1.1.4. Notation : Si $\mathscr{D}$ est une réduction

$$M = M_o \xrightarrow{\mathscr{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathscr{F}_2} M_2 \ldots \xrightarrow{\mathscr{F}_n} M_n \xrightarrow{\mathscr{F}_{n+1}} \ldots$$

nous notons $\mathscr{D}_{[n]}$ la réduction

$$M = M_o \xrightarrow{\mathscr{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathscr{F}_2} M_2 \ldots \xrightarrow{\mathscr{F}_n} M_n$$

constituée par les n premières étapes de $\mathscr{D}$. De plus, si $\mathscr{D}$ est une réduction finie, nous écrirons aussi $\omega(\mathscr{D})$ pour $\mathrm{Val}(\mathscr{D})$.

Remarquons que $\mathrm{Val}(\mathscr{D}) = \bigsqcup_{n\geq 0} \omega(\mathscr{D}_{[n]})$.

1.1.5. Corollaire : Soit $\mathscr{D}$ une réduction issue de M.

1) Si M est d'information finie, c'est-à-dire $M \equiv a$ où $a \in \mathscr{N}$, alors $\mathscr{D}$ est correcte ssi il existe n tel que $a = \omega(\mathscr{D}_{[n]})$.

2) Si M a une forme normale N, alors $\mathscr{D}$ est correcte ssi il existe n tel que $\mathscr{D}_{[n]}$ soit de la forme $M \xrightarrow{*} N$.

3) Si M a une forme normale N, alors la réduction normale issue de M est correcte.

Démonstration : évidente car a est isolé dans $\tilde{\mathscr{N}}$. En effet, $a \equiv \bigsqcup_{n\geq 0} \omega(\mathscr{D}_{[n]})$ est équivalent à $a = \omega(\mathscr{D}_{[n]})$ pour un $n \geq 0$. Or si M a une forme normale N, alors $M \equiv N$ et $N \in \mathscr{N}$. Maintenant, comme nous l'avons déjà vu, le théorème de standardisation garantit que, si M a une forme normale, alors la réduction normale atteindra cette forme normale. □

Remarquons que si, M n'a pas de forme normale, alors la réduction normale n'est pas forcément correcte. En effet, il suffit de considérer $M = x\Omega(Ix)$ où $\Omega = \Delta\Delta$ et $\Delta = \lambda x{\cdot}xx$. Alors la réduction normale est de la forme $M \to M \to M \to \ldots$ et la valeur qu'elle calcule est donc $x\Omega\Omega$. Or $M \equiv x\Omega x$. Mais nous verrons qu'une de ses variantes, la réduction normale parallèle, est toujours correcte.

1.2. Le treillis des réductions infinies

Cette partie nous a été soufflée par Berry [8] . En effet, l'introduction des réductions infinies permet de caractériser les réductions correctes. En 1.1.1, nous avons déjà parlé de réductions infinies. On peut adapter l'ordre de II.2 aux réductions infinies.

1.2.1. Notation et définition : L'ensemble des réductions infinies (ou éventuellement finies) de M est noté $\mathcal{R}^\infty(M)$. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dans $\mathcal{R}^\infty(M)$, nous posons :

$$\mathcal{D} \leq \mathcal{D}' \quad \text{ssi } \forall n \text{ tel que } n \geq 0,\ \exists p \text{ tel que } p \geq 0 \text{ et } \mathcal{D}_{[n]} \leq \mathcal{D}'_{[p]}$$

$$\mathcal{D} \sim \mathcal{D}' \quad \text{ssi } \mathcal{D} \leq \mathcal{D}' \leq \mathcal{D}$$

1.2.2. Proposition : L'ensemble $\mathcal{R}^\infty(M)$ munie de $\leq$ est un treillis complet.

Démonstration : En fait, nous avons complété l'ensemble des réductions finies $\mathcal{R}(M)$ de II.2.4. On vérifie alors aisément que l'ensemble $\mathcal{R}^\infty(M)$ a une structure de treillis. Toute paire de réductions a un plus grand commun minorant à la différence de II.2.4. En outre, si $X \subset \mathcal{R}^\infty(M)$ est un ensemble dirigé, on vérifie aisément que sa limite est aussi dans $\mathcal{R}^\infty(M)$. □

1.3. Caractérisation des réductions correctes

Nous allons voir que seuls certains radicaux de gauche (voir IV.2.4) sont importants pour qu'une réduction soit correcte. Nous généralisons la proposition IV.2.4.4.

1.3.1. Définition : L'ensemble des *radicaux de gauche critiques* d'une expression M, noté GC(M), est défini par :

1) $GC(M) = \emptyset$ si $M \equiv \Omega$

2) $GC(M) = \{R\}$ si $M \not\equiv \Omega$, si $\omega(M) = \Omega$ et si R est le radical de tête de M (voir IV.1.10).

3) $GC(M) = \bigcup_{i=1}^{n} GC(M_i)$ si $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$

La *réduction de gauche critique* est la réduction $\mathcal{D}_{GC}(M)$ finie ou infinie

$$M = M_o \overset{\mathcal{F}_1}{\to} M_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\to} M_2 \ldots \overset{\mathcal{F}_n}{\to} M_n \overset{\mathcal{F}_{n+1}}{\to} \ldots$$

où $\mathcal{F}_i = GC(M_i)$ pour tout $i \geq 1$.

Cette réduction est bien une réduction gauche au sens de VI.2.4.2. Remarquons en outre que l'ensemble $GC(M)$ n'est pas récursif, puisque la relation $R \in GC(M)$ n'est pas décidable puisque la relation $M \equiv \Omega$ ne l'est pas.

1.3.3. Proposition : Pour toute expression M, la réduction $\mathcal{D}$ de $\mathcal{R}^{\infty}(M)$ est correcte ssi $\mathcal{D}_{GC}(M) \leq \mathcal{D}$.

Démonstration :

1) Supposons $\mathcal{D}_{GC}(M) \leq \mathcal{D}$. On a donc $Val(\mathcal{D}_{GC}(M)) \sqsubseteq Val(\mathcal{D})$ grâce à IV.2.3.2. Or, pour tout a dans $\mathcal{A}(M)$, on a $a \sqsubseteq Val(\mathcal{D}_{GC}(M))$ par récurrence sur $\|a\|$. En effet, le cas $a = \Omega$ est trivial. Et, si $a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ a_1 a_2 \ldots a_n$, alors on a $M \not\equiv \Omega$ et deux cas se présentent. Si $\omega(M) = \Omega$, alors $\mathcal{D}_{GC}(M)$ commence par effectuer la réduction de tête de M qui se termine grâce à IV.1.10.6. On se retrouve donc dans le cas où $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$. Et, par récurrence, on a $a_i \sqsubseteq Val(\mathcal{D}_{GC}(M_i))$ pour tout i (grâce à IV.1.10.6). Donc $a \sqsubseteq Val(\mathcal{D}_{GC}(M))$. Finalement, on a $M \sqsubseteq Val(\mathcal{D}_{GC}(M))$. D'où $M \sqsubseteq Val(\mathcal{D})$. Donc $M \equiv Val(\mathcal{D})$ par 1.1.2 et $\mathcal{D}$ est correcte.

2) Supposons $\mathcal{D}$ correcte, c'est-à-dire $M \equiv Val(\mathcal{D})$. Pour $n \geq 0$ quelconque, considérons $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{GC}(M)_{[n]}$. Soit M_n l'expression tel que $\mathcal{D}_n$ est de la forme $M \overset{*}{\to} M_n$. Considérons $a = f(M_n)$ l'approximation de M associée à M_n comme suit :

(i) $f(N) = \Omega$ si $N \equiv \Omega$

(ii) $f(N) = \omega(\mathrm{Fnt}(N))$ si $N \not\equiv \Omega$ et si $\omega(N) = \Omega$ (voir IV.1.10)

(iii) $f(N) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x(f(N_1))(f(N_2))\ldots(f(N_n))$ si

$N = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ N_1 N_2 \ldots N_n$.

Nous affirmons, que l'on a $\mathcal{D}_n \le \mathcal{D}_a(M)$ où $\mathcal{D}_a(M)$ est définie en IV.2.4.4. En effet, on raisonne encore sur $\|a\|$. D'abord si $M \equiv \Omega$, alors $\mathcal{D}_{GC}(M) = \mathcal{O}$ et $\mathcal{D}_n = \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{D}_n \le \mathcal{D}_a(M)$. Si $M \not\equiv \Omega$ et si $\omega(M) = \Omega$, alors $\mathcal{D}_{GC}(M)$ commence par la réduction de tête de M. Si M_n se trouve sur cette réduction de tête $\mathcal{D}_t$ et M, alors $a = f(M_n) = \omega(\mathrm{Fnt}(M))$ et $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_a(M)$. Donc $\mathcal{D}_n \le (\mathcal{D}_n ; \mathcal{D}') = \mathcal{D}_t$. Si M_n ne se trouve pas sur la réduction de tête de M, alors on se ramène au cas où $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$ grâce à IV.2.4.4, et le résultat s'obtient par récurrence sur $\|a\|$. Finalement, on a $\mathcal{D}_n \le \mathcal{D}_a(M)$. Comme $\mathcal{D}$ est correcte, on a $a \sqsubseteq \mathrm{Val}(\mathcal{D})$ puisque $a \in \mathcal{A}(M)$. D'où $\mathcal{D}_a(M) \le \mathcal{D}$ par IV.2.4.4. Donc, pour tout n, on a $\mathcal{D}_n \le \mathcal{D}$ ce qui implique $\mathcal{D}_{GC}(M) \le \mathcal{D}$ par la définition 1.2.1.□

Nous adaptons une définition de Downey-Sethi [16] et O'Donnell [31].

<u>1.3.3. Notation et définition</u> : Si $\mathcal{D}$ est une réduction infinie issue de M et si R est un radical de M, nous écrirons $R/\mathcal{D} = \emptyset$ ssi $\exists n \ge 0$ tel que $R/\mathcal{D}_{[n]} = \emptyset$. Nous dirons qu'une *réduction* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{R}^\infty(M)$ *fait disparaître les radicaux de gauche critiques* ssi, pour tout $n \ge 0$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{[n]} ; \mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_{[n]}$ de la forme $M \overset{*}{\to} M_n$ et $GC(M_n)/\mathcal{D}_n = \emptyset$.

<u>1.3.4. Notation</u> : Si $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^\infty(M)$ et $\mathcal{D}' \in \mathcal{R}(M)$, nous notons $\mathcal{D}/\mathcal{D}'$ la réduction définie pour tout $n \ge 0$ par $(\mathcal{D}/\mathcal{D}')_{[n]} = \mathcal{D}_{[n]}/\mathcal{D}'$.

<u>1.3.5. Lemme</u> : Pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(M)$ de la forme $M \overset{*}{\to} N$, on a $\mathcal{D}_{GC}(M)/\mathcal{D} = \mathcal{D}_{GC}(N)$.

Démonstration : Posons $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{GC[n]}$ pour tout $n \geq 0$. Nous montrons par récurrence sur $<\ell, n, ||M||>$ que $\mathcal{D}_n/\mathcal{D}$ est le début de la réduction $\mathcal{D}_{GC}(N)$ si ℓ est la longueur de $\mathcal{D}$. On se ramène donc par récurrence au cas où la réduction $\mathcal{D}$ est de la forme $M \xrightarrow{\mathcal{F}} N$. Si $M \equiv \Omega$, alors $\mathcal{D}_{GC}(M) = \mathcal{O}$ et donc $\mathcal{D}_n/\mathcal{D} = \mathcal{O}$. Or $M \equiv N \equiv \Omega$ par IV.4.1.1 et donc $\mathcal{D}_{GC}(N) = \mathcal{O}$. Si $M \not\equiv \Omega$ et $\omega(M) = \Omega$, alors la réduction $\mathcal{D}_n$ est de la forme $M \xrightarrow{R} M_1 \xrightarrow{*} M_n$ où R est le radical de tête de M. On a donc deux cas selon que $R \in \mathcal{F}$ ou non. Si $R \in \mathcal{F}$, alors $M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}'} N$ par II.1.8.5 et on applique la récurrence. Si $R \notin \mathcal{F}$, alors R a un résidu R' unique dans N qui est le radical de tête de N. Donc $\omega(N) = \Omega$ et $N \equiv M \not\equiv \Omega$. La réduction $\mathcal{D}_{GC}(N)$ est donc de la forme $N \xrightarrow{R'} N_1$ et $M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}'} N_1$ par II.1.8.5. On applique donc encore la récurrence. Maintenant, si $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p \cdot x\, M_1 M_2 \ldots M_q$, alors on raisonne par récurrence sur $||M||$. □

1.3.6. Proposition : Une réduction $\mathcal{D}$ est correcte ssi $\mathcal{D}$ fait disparaître les radicaux de gauche critiques.

Démonstration : Par 1.3.3., la réduction $\mathcal{D}$ de $\mathcal{R}^\infty(M)$ est correcte ssi $\mathcal{D}_{GC}(M) \leq \mathcal{D}$. Supposons d'abord $\mathcal{D}$ correcte et posons $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{[n]}; \mathcal{D}_n$ pour tout $n \geq 0$. Soit $\mathcal{D}_{[n]}$ de plus de la forme $M \xrightarrow{*} M_n$. On a $\mathcal{D}_{GC}(M)/\mathcal{D}_{[n]} = \mathcal{D}_{GC}(M_n)$ par le lemme précédent. Donc $\mathcal{D}_{GC}(M_n) \leq \mathcal{D}_n$ pour tout $n \geq 0$. On a donc $GC(M_n)/\mathcal{D}_n = \emptyset$ pour tout $n \geq 0$ et la réduction $\mathcal{D}$ fait disparaître les radicaux de gauche critiques. Réciproquement, supposons $GC(M_n)/\mathcal{D}_n = \emptyset$ pour tout $n \geq 0$. Alors nous montrons, par récurrence sur p, que $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_{GC}(M)_{[p]}$ vérifie $\mathcal{D}_p \leq \mathcal{D}$. Le cas $p = 0$ est trivial. Si $\mathcal{D}_p = (\mathcal{D}_{p-1} ; \mathcal{D}')$, alors par récurrence on a $\mathcal{D}_{p-1} \leq \mathcal{D}$. Donc il existe n tel que $\mathcal{D}_{p-1} \leq \mathcal{D}_{[n]}$. On a donc $\mathcal{D}_{p-1}/\mathcal{D}_{[n]} = \mathcal{O}$ et $\mathcal{D}_p/\mathcal{D}_{[n]} = \mathcal{D}'/\mathcal{D}'_n$ si $\mathcal{D}'_n = \mathcal{D}_{[n]}/\mathcal{D}_{p-1}$ (voir figure). Par le lemme précédent, les radicaux contractés par $\mathcal{D}'/\mathcal{D}'_n$ sont des radicaux de gauche critiques de M_n. Donc, comme $\mathcal{D}$ fait disparaître les radicaux de gauche critiques, il existe m tel que $(\mathcal{D}'/\mathcal{D}'_n)/(\mathcal{D}_{n[m]}) = \mathcal{O}$. D'où $\mathcal{D}_p/\mathcal{D}_{[n+m]} = \mathcal{O}$. Finalement, on a $\mathcal{D}_p \leq \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}_{GC}(M) \leq \mathcal{D}$. La réduction $\mathcal{D}$ est donc correcte.□

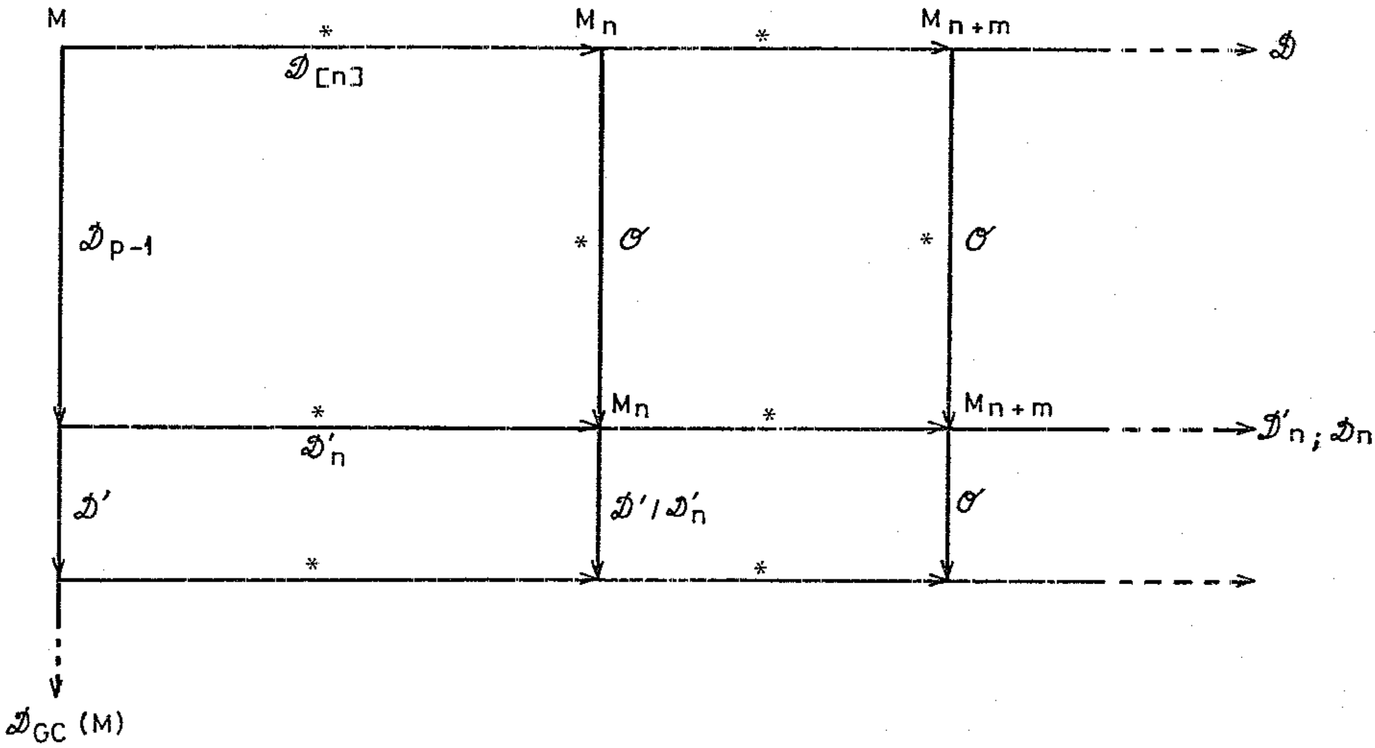


Figure :

Cette proposition correspond donc à celles de Downey - Sethi [16] et de O'Donnell [31].

1.4. Réductions sûres

Nous venons donc de voir qu'une réduction est correcte ssi elle fait disparaître les radicaux de gauche critiques. Bien qu'il est impossible de décider si un radical de gauche est critique, on peut se demander si ces radicaux sont "détectables" à l'avance en termes de résidus ou d'interprétation.

Nous reprenons la notation $M[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ de IV.4.2.4. De même, une réduction $\mathcal{D}$ de la forme

$$M = M_o \overset{\mathcal{F}_1}{\to} M_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\to} M_2 \ldots \overset{\mathcal{F}_n}{\to} M_n \overset{\mathcal{F}_{n+1}}{\to} \ldots$$

développe un ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux de M ssi il existe un $n \geq 0$ tel que $(\mathcal{F}/\mathcal{D}_{[n]}) \cap \mathcal{F}_{n+1} \neq \emptyset$ (voir IV.4.2.3).

1.4.1. Définition*: Un *ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux* de M est *critique* ssi $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \neq M$. Une réduction qui ne contracte que des ensembles critiques de radicaux est une *réduction critique*.

1.4.2. Proposition : Un ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux de M est critique ssi la réduction de gauche critique de M développe $\mathcal{F}$.

* Définition suggérée par G. Plotkin.

Démonstration : Si, pour tout $n \geq 0$, la réduction $\mathcal{D}_n$ ne développe pas $\mathcal{F}$ (voir IV.4.2.3), alors on applique IV.4.2.5 et $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \overset{*}{\rightarrow} M_n[\mathcal{F}_n\backslash\Omega]$ où $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/\mathcal{D}_n$. Donc
$\omega(M_n) = \omega(M_n[\mathcal{F}_n\backslash\Omega]) \sqsubseteq M_n[\mathcal{F}_n\backslash\Omega] \equiv M[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ en appliquant IV.4.1.1. Or, comme on a $\mathrm{Val}(\mathcal{D}_{GC}(M)) = \bigsqcup_n \omega(M_n)$, on aurait $M \sqsubseteq M[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ par 1.3.3. D'où $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv M$, puisque on a toujours $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \sqsubseteq M$ par IV.4.1.2. On obtient donc une contradiction et il existe donc un $n \geq 0$ tel que
$(\mathcal{F}/\mathcal{D}_n) \cap GC(M_n) \neq \emptyset$. La réciproque se fait par 1.3.1 et IV.4.2.5.□

1.4.3. Proposition : En général, les réductions critiques ne sont pas correctes.

Démonstration : Soit $M = I(Y_f)$ où $I = \lambda x{\cdot}x$ et $Y_f = (\lambda x{\cdot}f(xx))(\lambda x{\cdot}f(xx))$. Alors la réduction

$$M = M_0 \rightarrow I(f(Y_f)) \rightarrow I(f(f(Y_f)) \rightarrow I(f(f(f(Y_f)))) \rightarrow \ldots$$

est critique, mais n'est pas correcte.□

La condition "radical critique" n'est donc pas assez forte pour assurer la disparition de tous les radicaux de gauche critiques. Nous reprenons le critère de sûreté de Vuillemin [42,43] déjà étudié par l'auteur dans [23], qui visera à détecter les radicaux qui deviennent "immédiatement" des radicaux de gauche critiques.

1.4.4. Définition : Un *ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux* de M est *crucial* ssi $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv \omega(M)$. Une réduction qui ne contracte que des ensembles cruciaux de radicaux est une *réduction sûre*.

1.4.5. Proposition*: Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de radicaux de M, alors $\mathcal{F}$ est crucial ssi

1) $\mathcal{F}$ est quelconque quand $M \equiv \Omega$

*Proposition suggérée par H.Barendregt.

2) La réduction de tête de M développe $\mathcal{F}$ quand $M \not\equiv \Omega$ et $\omega(M) = \Omega$ (voir IV.1.10.4).

3) $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_i$ crucial dans M_i pour $1 \leq i \leq n$ quand $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$.

Démonstration : Si $M \equiv \Omega$, alors $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv \Omega$ pour $\mathcal{F}$ quelconque en se servant de IV.4.1.2. Si M est en f.n.t., alors $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$ et les radicaux de M sont les radicaux des M_i. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de radicaux de M, alors $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ où $\mathcal{F}_i$ correspond à $\mathcal{F}$ dans chaque M_i. Donc

$$M[\mathcal{F}\backslash\Omega] = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1[\mathcal{F}_1\backslash\Omega] M_2[\mathcal{F}_2\backslash\Omega] \ldots M_n[\mathcal{F}_n\backslash\Omega]$$

De plus

$$\omega(M) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x(\omega(M_1))(\omega(M_2))\ldots(\omega(M_n))$$

Et la définition de $\equiv$ implique trivialement que l'on a $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv \omega(M)$ ssi $M_i[\mathcal{F}_i\backslash\Omega] \equiv \omega(M_i)$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$. Donc $\mathcal{F}$ est crucial dans M ssi chacun des $\mathcal{F}_i$ est crucial dans M_i. Il reste donc à considérer le cas où $\omega(M) = \Omega$ et $M \not\equiv \Omega$. Nous montrons qu'alors $\mathcal{F}$ est crucial ssi la réduction de tête de M développe $\mathcal{F}$ en effectuant une récurrence sur sa longueur Dfnt(M) (voir IV.2.4.5). Soit R le radical de tête de M et $M \xrightarrow{R} M'$. Nous allons utiliser le lemme IV.4.2.5 en considérant l'ensemble $\mathcal{F}'$ des résidus de $\mathcal{F}$ dans M'. Le lemme nous dit que, si $R \notin \mathcal{F}$, alors $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \xrightarrow{*} M'[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$ et donc $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv M'[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$ par IV.4.1.1.

Cas 1 : Si Dfnt (M) = 1, alors M' est en f.n.t. Nous affirmons que $\mathcal{F}$ est crucial ssi $R \in \mathcal{F}$. En effet, si $R \in \mathcal{F}$, alors $\Omega = \omega(M) \sqsubseteq M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \sqsubseteq M[R\backslash\Omega] \equiv \Omega$ par IV.4.1.2 et IV.4.1.6 puisque $M[R\backslash\Omega] \underset{\omega}{\xrightarrow{*}} \Omega$. Donc $\mathcal{F}$ est crucial. Réciproquement, si $R \notin \mathcal{F}$, alors $M'[\mathcal{F}'\backslash\Omega] \not\equiv \Omega$ puisque M' est en f.n.t. Donc $M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv M'[\mathcal{F}'\backslash\Omega] \not\equiv \Omega = \omega(M)$ par la remarque précédente. Et $\mathcal{F}$ n'est pas crucial.

Cas 2 : Si Dfnt(M) > 1, alors M et M' ne sont pas en f.n.t. Donc $\omega(M) = \omega(M') = \Omega$. Si $R \in \mathcal{F}$, alors, comme dans le cas précédent, l'ensemble $\mathcal{F}$ est crucial. Si $R \notin \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est crucial ssi $\mathcal{F}'$ est crucial puisque

$M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv M'[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$ par la remarque précédente. Donc, par récurrence, l'ensemble $\mathcal{F}'$ est crucial ssi la réduction de tête de M' développe $\mathcal{F}'$. En résumé, si $R \notin \mathcal{F}$, l'ensemble $\mathcal{F}$ est crucial ssi la réduction de tête de M développe $\mathcal{F}$. □

Nous introduisons des notations un peu techniques pour montrer que toute réduction sûre est correcte.

<u>1.4.6. Notation</u> : Si $n \geq 0$ et $h \geq 0$, nous notons $\mathcal{D}_{[n,n+h]}$ les h étapes qui suivent la $n^{\text{ième}}$ expression obtenue par $\mathcal{D}$. Formellement on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{[n]}; \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}_{[n,n+h]} = \mathcal{D}'_{[h]}$.

<u>1.4.7. Notation</u> : Si R est un radical de gauche critique de M, nous notons d(R,M) la quantité suivante :

1) $d(R,M) = \text{Dfnt}(M)$ si $\omega(M) = \Omega$ et $M \not\equiv \Omega$ (voir IV.2.4.5).

2) $d(R,M) = d(R,M_i)$ si $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$ et $R \in GC(M_i)$.

<u>1.4.8. Proposition</u> : Toute réduction sûre est correcte. Plus exactement, si $\mathcal{D}_{[n]}$ est de la forme $M \overset{*}{\to} M_n$ et $\mathcal{D}$ est une réduction sûre, on a $R/\mathcal{D}_{[n,m]} = \emptyset$ pour $m = n + d(R,M_n)$, pour tout $n \geq 0$ et pour tout radical $R \in GC(M_n)$.

<u>Démonstration</u> : Raisonnons par récurrence $\|M\|$. Montrons que, si $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^{\infty}(M)$ est sûre, alors tout radical R de gauche critique de M disparaît après d(R,M) étapes de $\mathcal{D}$. Si $M \equiv \Omega$, alors $GC(M) = \emptyset$ et ce cas est trivial. Si $M \not\equiv \Omega$ et $\omega(M) = \Omega$, alors $GC(M) = \{R\}$ où R est le radical de tête de M. Or, comme $\mathcal{D}$ est sûre, nous affirmons que M_n est en f.n.t. pour $n = \text{Dfnt}(M)$. En effet, par 1.4.5, la première étape de $\mathcal{D}$ que nous supposons de la forme $M \overset{\mathcal{F}}{\to} M_1$ est sûre ssi $\text{Dfnt}(M) > \text{Dfnt}(M_1)$. Donc $\text{Dfnt}(M_n) = 0$. On en déduit que $R/\mathcal{D}_{[n]} = \emptyset$, puisque qu'un radical de tête reste un radical de tête par résidu. Si $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$, on raisonne par récurrence sur $\|M\|$. Finalement, par 1.3.6, la réduction $\mathcal{D}$ est correcte.□

Nous donnons quelques exemples de stratégies sûres. Par stratégie, nous entendons une fonction (récursive) f définie sur les λ-expressions telle que f(M) est un ensemble de radicaux de M pour tout M (voir Barendregt, Bergstra, Klop & Volken [5] pour plus de précisions). On peut vérifier facilement que les stratégies suivantes sont sûres et donc correctes.

1) *La réduction normale parallèle* définie par :

(i) $f(M) = \{R\}$ si M n'est pas en f.n.t et R est le radical de tête de M.

(ii) $f(M) = \bigcup_{i=1}^{n} f(M_i)$ si $M = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \dots M_n$

2) *La réduction totale* telle que f(M) est l'ensemble de tous les radicaux de M pour tout M. Cette stratégie est encore appelée réduction de Gross.

3) *La réduction normale parallèle avec appel par valeur à gauche* définie par :

(i) $f(M) = \{R\}$ si M n'est pas en f.n.t., si $R = (\lambda x \cdot A)B$ est le radical de tête de M et si A est en f.n.t.

(ii) $f(M) = f(A)$ si M n'est pas en f.n.t., si $R = (\lambda x \cdot A)B$ est le radical de tête de M et si A n'est pas en f.n.t.

(iii) $f(M) = \bigcup_{i=1}^{n} f(M_i)$ si $M = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \dots M_n$

4) *La réduction normale parallèle avec appel par valeur strict* définie par :

(i) $f(M) = f(A)$ si M n'est pas en f.n.t., si $R = (\lambda x \cdot A)B$ est le radical de tête de M et si A n'est pas en f.n.t.

(ii) $f(M) = f(M_i)$ si $M = \lambda x_1 x_2 \dots x_m \cdot R\ M_1 M_2 \dots M_n$, si $R = (\lambda y_1 y_2 \dots y_p \cdot y_i\ A_1 A_2 \dots A_q) M_o$, si $1 \le i \le p$, si $n \ge i$ et si M_i n'est pas en f.n.t.

(iii) $f(M) = \{R\}$ si M n'est pas en f.n.t, si R est le radical de tête de M et si aucune des deux conditions précédentes n'est réalisée.

$$\text{(iv)} \quad f(M) = \bigcup_{i=1}^{n} f(M_i) \text{ si } M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$$

Montrons par exemple que la dernière stratégie est sûre; c'est-à-dire $M[f(M)\backslash\Omega] \equiv \omega(M)$ pour tout M. Nous raisonnons par récurrence sur $||M||$. Dans le cas i, on a $\omega(M) = \Omega$ et $\omega(A) = \Omega$. Par récurrence, on a $A[f(A)\backslash\Omega] \equiv \Omega$. Donc $M[f(M)\backslash\Omega] \overset{*}{\underset{\omega}{\rightarrow}} \Omega$ et $M[f(M)\backslash\Omega] \equiv \Omega$ par IV.4.1.6. Dans le cas ii, on a $M_i[f(M_i)\backslash\Omega] \equiv \omega(M_i) = \Omega$. Donc $M[f(M)\backslash\Omega] \overset{*}{\rightarrow} M'$ où

$$M' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot (\lambda y_{i+1} y_{i+2} \ldots y_p \cdot M_i' A_1' A_2' \ldots A_n') M_{i+1} M_{i+2} \ldots M_n$$

avec $M_i' = M_i[f(M_i)\backslash\Omega] \equiv \Omega$. Donc $M' \equiv M''$ par IV.4.2.10 si

$$M'' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot (\lambda y_{i+1} y_{i+2} \ldots y_p \cdot \Omega A_1' A_2' \ldots A_n') M_{i+1} + M_{i+2} \ldots M_n$$

et $M'' \overset{*}{\underset{\omega}{\rightarrow}} \Omega$. Finalement, grâce à IV.4.1.1 et IV.4.1.6, on a $M[f(M)\backslash\Omega] \equiv M' \equiv M'' \equiv \Omega$. Les cas iii et iv sont triviaux.

Naturellement, toute combinaison de ces stratégies est également sûre et donc correcte.

Pour l'érudition, signalons que Barendregt, Bergstra, Klop et Volken[5]ont étudié les stratégies perpétuelles, c'est-à-dire celles qui ne sont pas correctes, ou plus exactement qui sont sûres de manquer la forme normale s'il existe un moyen de ne pas y aboutir. Mais d'un point de vue informatique, ces stratégies n'ont pas grand sens.

2) <u>REDUCTIONS COMPLETES- REDUCTIONS OPTIMALES</u>

Le problème est simple. Il s'agit de trouver des réductions correctes qui vont le plus vite possible. D'abord, il faudra définir la signification de la mesure de vitesse quand on considèrera des expressions qui n'ont que des réductions correctes infinies. Mais plaçons-nous d'abord dans le cas contraire et plus exactement dans le cas des expressions qui ont une forme normale. Le problème est d'obtenir la forme normale par la réduction la plus courte possible. Il faut donc respecter deux contraintes :

1) éviter de contracter des radicaux inutiles, c'est-à-dire non critiques,
2) éviter de dupliquer les radicaux critiques, où la relation de duplication a été définie en II.4.2.2.

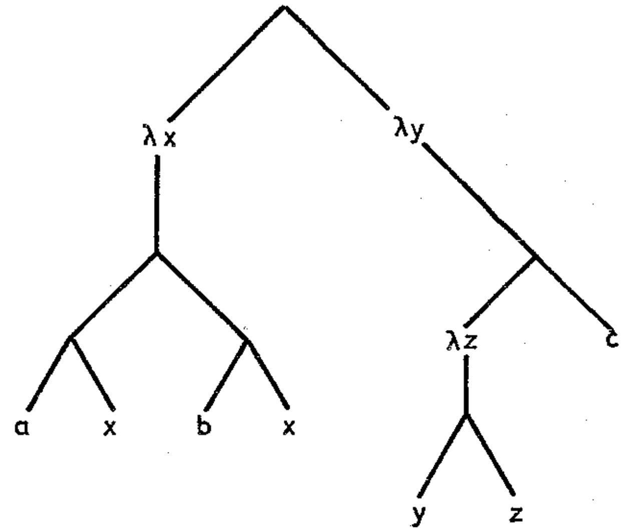
Ce problème a déjà été étudié pour d'autres systèmes de réécriture. Vuillemin [42,43] définit une stratégie optimale, la "règle du retard", et montre qu'elle est optimale pour les programmes récursifs. Staples [40]a traité le cas de la logique combinatoire où la règle de Vuillemin reste étonnamment optimale. Indépendamment, Wadsworth [44]avait aussi défini une règle du retard pour le λ-calcul vis-à-vis de la β-conversion, mais, comme le montre Wadsworth, cette règle n'est pas optimale. Tous ces procédés relèvent du même esprit :

1) à chaque étape, on contracte les radicaux de gauche,
2) les expressions obtenues à chaque étape sont représentées par une structure de donnée (qui n'est pas un arbre mais un graphe sans cycles) où on n'effectue jamais de duplication de radicaux.

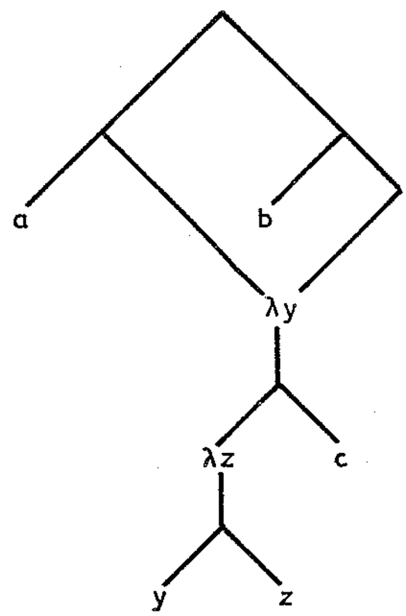
Nous retrouvons donc les deux contraintes vues plus haut. Mais nous allons voir dans la proposition suivante que le λ-calcul a un comportement différent de celui des programmes récursifs ou de la logique combinatoire dû à la présence de variables liées. Mais auparavant, nous rappelons comment Wadsworth [44]réduit les λ-expressions. Nous le faisons informellement sur deux exemples.

<u>Exemple 1</u> : $M = (\lambda x\cdot(ax)(bx))(\lambda y\cdot(\lambda z\cdot yz)c)$. Au début, l'expression M est représentée sous forme d'arbre comme nous l'avons décrit au chapitre I. L'expression M a une forme normale $N = a(\lambda y\cdot yc)(b(\lambda y\cdot yc))$. Wadsworth effectue la réduction $M \to M_1 \to N$ où les expressions M, M_1 et N sont représentées clairement de la manière suivante :

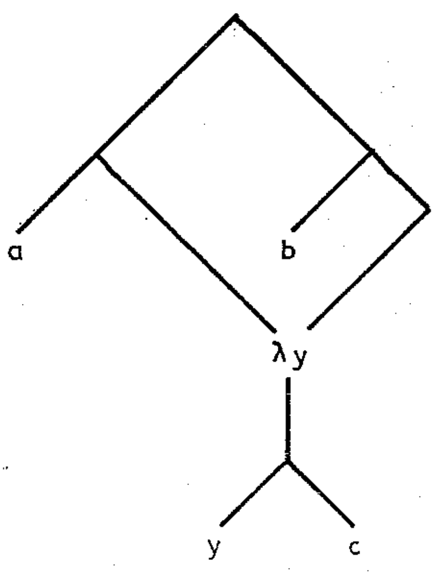
$M =$



$M_1 =$

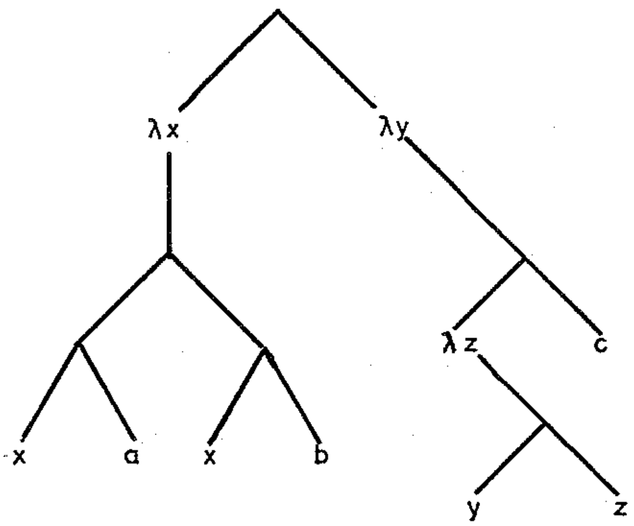


$N =$

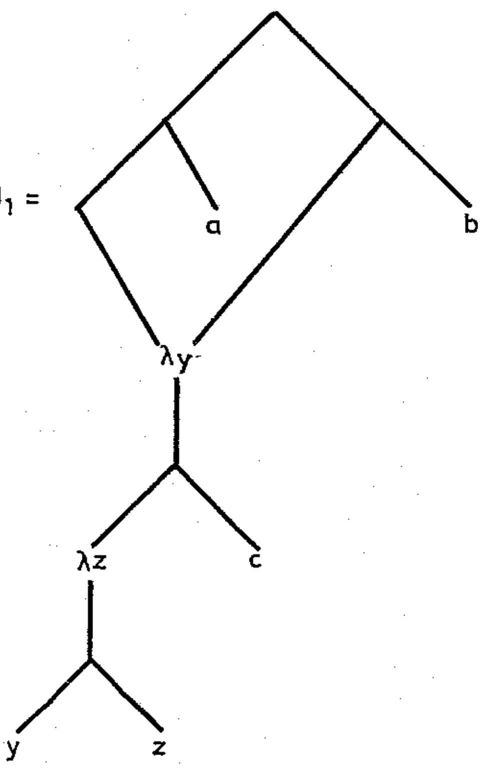


<u>Exemple 2</u> : $M = (\lambda x\cdot(xa)(xb))(\lambda y\cdot(\lambda z\cdot yz)c)$. Alors M a une forme normale $N = (ac)(bc)$. Wadsworth effectue alors la réduction $M \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to M_4 \to N$ non optimale définie de la manière suivante :

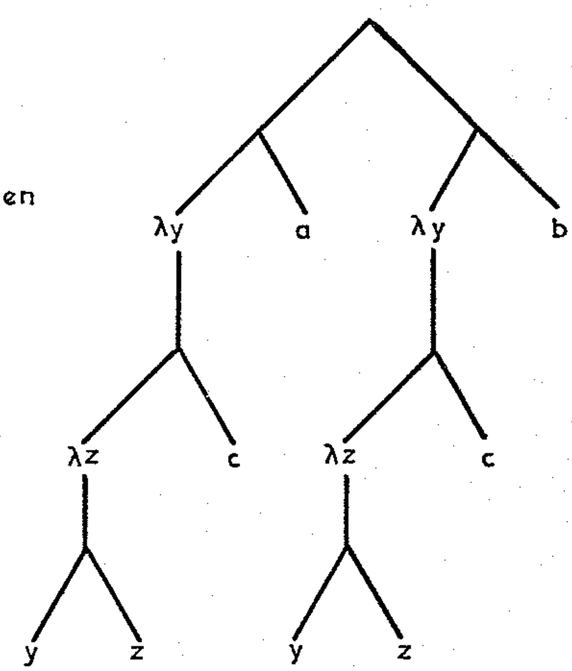
M =



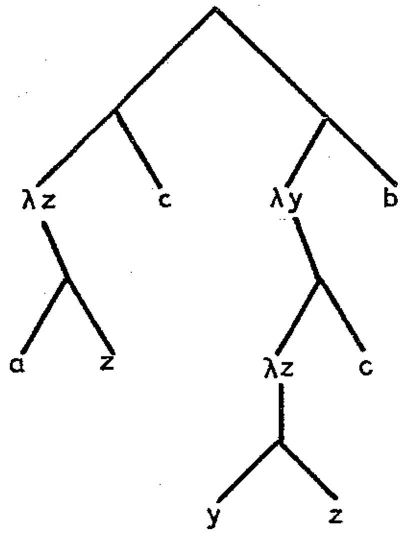
M_1 =



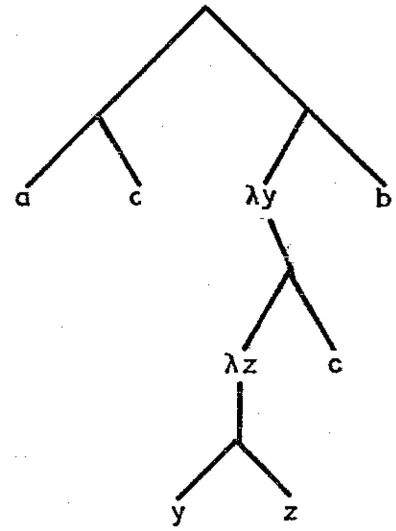
réécrit en



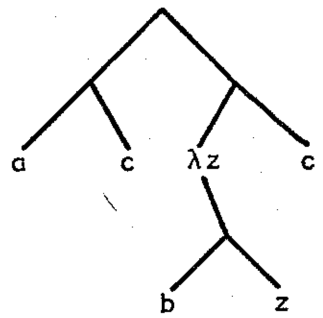
$M_2 =$



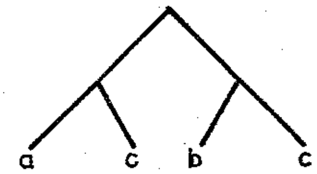
$M_3 =$



$M_4 =$



$N =$



Dans cet exemple, le problème se situe au niveau de M_1. En effet, on ne peut à la fois contracter le radical le plus à gauche de M_1 et conserver un objet unique pour représenter le radical $(\lambda z \cdot yz)c$. Alors Wadsworth duplique carrément la sous-expression "critique". Pour résumer la méthode de Wadsworth, on peut dire que tout se passe bien tant qu'on ne partage pas des abstractions, mais les problèmes se produisent quand une abstraction partagée arrive en partie fonction du radical que l'on veut contracter.

Jusqu'à présent, grâce au théorème des développements finis de II.1.8.5, nous n'avons pas fait de différence entre les réductions qui ne contractent qu'un seul radical à chaque étape et les réductions qui contractent des ensembles de radicaux à chaque étape. Dorénavant, nous appelons *réductions non parallèles* les premières et *réductions parallèles* les secondes, si nous voulons les différencier.

<u>2.1.1. Définition</u> : Une réduction $\mathcal{D}$ de la forme

$$M = M_o \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2 \ldots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n \xrightarrow{\mathcal{F}_{n+1}} \ldots$$

ne fait pas de duplication ssi, pour tout i et j tels que $1 \leq i < j$ et pour tout $R_i \in \mathcal{F}_i$ et $R_j \in \mathcal{F}_j$ distincts, il n'existe pas de paire $(R', \mathcal{D}')$ telle que $(R', \mathcal{D}') \leq (R_i, \mathcal{D}_{[i-1]})$ et $(R', \mathcal{D}') \leq (R_j, \mathcal{D}_{[j-1]})$ (voir II.4.2.2).

2.1.2. Proposition : Certaines expressions, qui ont une forme normale, n'ont pas de réduction correcte non parallèle qui ne fait pas de duplication.

Démonstration : Posons $F_n = \lambda x \cdot x\ I\ xx \ldots x$ où F_n a $n+1$ occurrences de la variable liée x et $I = \lambda y \cdot y$. Posons $\Delta_n = \lambda x \cdot xx \ldots x$ où Δ_n a aussi n occurrences de x. Considérons l'expression $M = F_m(\lambda y \cdot \Delta_n(ya))$. Alors nous vérifions que toute réduction menant à la forme normale de M fait des duplications. En effet, l'expression M ne contient que deux radicaux $R_m = M$ et $S_n = \Delta_n(ya)$. Toute réduction non parallèle issue de M commence donc pas contracter R_m ou S_n. Le premier type de réductions duplique S_n et toute réduction $M \xrightarrow{R_m} M' \xrightarrow{*} N$ non parallèle contracte m fois un résidu de S_n. Et, si on considère une réduction non parallèle $M \xrightarrow{S_n} M_1 \xrightarrow{*} N$ et si on pose $G_n = \lambda y \cdot \Delta_n(ya)$ et $G'_n = \lambda y \cdot (ya)(ya) \ldots (ya)$, alors cette réduction $\mathcal{D}$ est forcément de la forme $M \to M_1 \to M_2 \to M_3 \xrightarrow{*} N$ décrite par la figure ci-dessous. Mais, si on considère la réduction $\mathcal{D}'$ de la forme $M \to N_1 \to N_2$ décrite aussi ci-dessous, on a $(Ia, \mathcal{D}') \leq (R, \mathcal{D}_{[3]})$ pour tout radical $R = Ia$ de M_3. Donc la réduction $\mathcal{D}$, qui contracte n fois un résidu du radical Ia de N_2, fait aussi des duplications.□

Figure :

$$
\begin{tikzcd}
 & M = F_m\, G_n \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
M_1 = F_m\, G'_n \arrow[d] & & N_1 = G_n\, I\, G_n\, G_n \ldots G_n \arrow[dr] & \\
M_2 = G'_n\, I\, G'_n\, G'_n \ldots G'_n \arrow[d] & & & N_2 = \Delta_n(Ia)\, G_n\, G_n \ldots G_n \arrow[dlll, "*"'] \\
M_3 = (Ia)(Ia)\ldots(Ia)\, G'_n\, G'_n \ldots G'_n \arrow[d, "*"'] & & & \\
N = aa \ldots a\, G'_n\, G'_n \ldots G'_n & & &
\end{tikzcd}
$$

L'exemple précédent montre donc que, si on veut éviter les duplications, on doit irrémédiablement considérer les réductions parallèles. (Ceci n'est pas le cas pour les programmes récursifs ou la logique combinatoire).
Mais alors on se heurte à un problème de coût. Il n'est en effet pas raisonnable que le coût d'une réduction parallèle soit sa longueur, c'est-à-dire son nombre d'étapes élémentaires. En effet, deux radicaux contractés simultanément peuvent n'avoir aucun rapport et un coût unitaire pour une telle opération est abusif. Compter un pour la contraction simultanée de plusieurs radicaux demande donc une justification. La meilleure justification est de produire une implémentation ou une structure de donnée où les radicaux contractés simultanément sont représentés par un objet unique. Si on veut que cette structure n'effectue pas de duplications, elle doit donc être différente de celle de Wadsworth [44]. Malheureusement, nous ne saurons pas exhiber cette structure. Une autre alternative consiste à utiliser la relation de duplication telle que nous l'avons définie en II.4.2.2. et à compter un pour la contraction simultanée de plusieurs radicaux qui sont des

radicaux dupliqués d'un même radical. Nous allons considérer ces réductions dans le paragraphe suivant.

Enfin, si on tient à considérer les réductions non parallèles qui font éventuellement des duplications, l'exemple précédent montre qu'il est bien difficile de définir une stratégie optimale car, dans cet exemple, la plus courte réduction qui mène à la forme normale dépend de la valeur de m par rapport à n! .

2.2. Réductions complètes

Nous introduisons un ensemble particulier de réductions qui ne font pas de duplications, les réductions complètes, qu'il ne faudra pas confondre avec les réductions complètes relatives à une réduction de II.4.4.

2.2.1. Notation : Nous généralisons la notation de II.4.2.1 et, si $\mathcal{D}$ est de la forme $M \overset{*}{\to} N$ et si $\mathcal{F}$ est un ensemble de radicaux de N, alors nous écrirons $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$.

2.2.2. Définition : $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ est complet par famille ou encore est *f-complet* ssi $\mathcal{F} = \{R' \mid (R', \mathcal{D}) \sim (R, \mathcal{D})\}$ quand $R \in \mathcal{F}$.

2.2.3. Définition : $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ est complet par duplication ou encore est *d-complet* ssi $\mathcal{F}$ est maximal tel qu'il existe $(R', \mathcal{D}')$ et $\mathcal{D}''$ tels que $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}' ; \mathcal{D}''$ et $\mathcal{F} = R'/\mathcal{D}''$.

2.2.4. Définition : $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ est complet pour les étiquettes ou encore est *e-complet* ssi $\mathcal{F}_e = \{R'_e \mid \text{degré}\ (R'_e) = \text{degré}\ (R_e)\}$ quand $R_e \in \mathcal{F}_e$ et $\mathcal{F}_e$ est l'ensemble isomorphe à $\mathcal{F}$ dans l'expression étiquetée V telle que $U \overset{*}{\to} V$ est isomorphe à $\mathcal{D}$ et INIT(U) est vrai.

Ces définitions s'appuient sur ce que nous avons vu en II.4.2.2, II.1.8.2 et II.1.8.5.

2.2.5. Définition : Une *réduction* $\mathcal{D}$ éventuellement infinie et parallèle

$$M = M_o \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2 \ldots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n \xrightarrow{\mathcal{F}_{n+1}} \ldots$$

est *f-complète* (respectivement *d-complète* ou *e-complète*) ssi, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $(\mathcal{F}_n, \mathcal{D}_{[n-1]})$ est f-complet (respectivement d-complet ou e-complet).

2.2.6. Proposition : Toute réduction f-complète, d-complète ou e-complète ne fait pas de duplication.

Démonstration : Supposons que la réduction $\mathcal{D}$

$$M = M_o \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2 \ldots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n \xrightarrow{\mathcal{F}_{n+1}} \ldots$$

fait des duplications, c'est-à-dire qu'il existe i et j tels que $1 \leq i < j$ et $R_i \in \mathcal{F}_i$ et $R_j \in \mathcal{F}_j$ et $(R',\mathcal{D}')$ tels que $(R',\mathcal{D}') \leq (R_i,\mathcal{D}_{[i-1]})$ et $(R',\mathcal{D}') \leq (R_j,\mathcal{D}_{[j-1]})$. Alors, par II.4.2.3, on a $\mathcal{D}' \leq \mathcal{D}_{[i-1]}$. Par ailleurs, on a trivialement $\mathcal{D}_{[i-1]} \leq \mathcal{D}_{[j-1]}$. Donc, par II.4.2.6., il existe R_j' tel que $(R',\mathcal{D}') \leq (R'_j,\mathcal{D}_{[i-1]}) \leq (R_j,\mathcal{D}_{[j-1]})$. D'où par II.4.2.3, on a $R_j \in R_j'/\mathcal{D}_{[i-1,j-1]}$ et donc $R_j' \notin \mathcal{F}_i$. Et $(\mathcal{F}_i,\mathcal{D}_{[i-1]})$ n'est pas d-complet. Donc $\mathcal{D}$ n'est pas d-complète. De même, la réduction $\mathcal{D}$ n'est pas f-complète, ni e-complète par II.1.8.2. □

Nous montrons que les trois types de réductions complètes de 2.2.5 sont les mêmes. Ceci nous amène à donner d'abord quelques notations et définitions.

2.2.7. Notation : La classe d'équivalence de $(R,\mathcal{D})$ vis à vis de la relation $\sim$ est notée $[(R,\mathcal{D})]$. Si $\mathcal{D}$ est une réduction éventuellement infinie et parallèle telle que, pour tout $i \geq 1$, on a $\mathcal{D}_{[i-1,i]}$ de la forme $M_{i-1} \xrightarrow{\mathcal{F}_i} M_i$, alors nous posons

$$FAM(\mathcal{D}) = \{[(R_i,\mathcal{D}_{[i-1]})] \mid R_i \in \mathcal{F}_i \text{ et } i \geq 1\}$$

Nous utilisons maintenant les notations et définitions du théorème des développements finis généralisés de II.4.4 et de représentant canonique de III.6.

2.2.8. Lemme : Si $(R,\mathcal{D})_o = (R_o, \mathcal{D}_o)$, alors $FAM(\mathcal{D}_o) \subset FAM(\mathcal{D})$.

Démonstration : La définition III.6.2 dérive sur la définition III.2.1.5 grâce à III.1.4.3 et II.2.5.4. Considérons la réduction standard $\mathcal{D}_{st}$ telle que $\mathcal{D}_{st} \sim \mathcal{D}$. Alors, en reprenant la démonstration du théorème de standardisation de II.1.4 (dont le seul cas critique est illustré par la figure de II.2.3.3), on a aisément $FAM(\mathcal{D}_{st}) \subset FAM(\mathcal{D})$. Or, grâce au théorème III.6.4, la définition III.2.1.5 indique aussi clairement que $FAM(\mathcal{D}_o) \subset FAM(\mathcal{D}_{st})$. Finalement $FAM(\mathcal{D}_o) \subset FAM(\mathcal{D})$. □

2.2.9 Lemme : Si $\mathcal{D}$ est une réduction complète relative à elle-même, on a $(R,\mathcal{D})_o \leq (R,\mathcal{D})$ pour toute paire $(R,\mathcal{D})$.

Démonstration : Posons $(R_o,\mathcal{D}_o) = (R,\mathcal{D})_o$. Par le lemme précédent, on a $FAM(\mathcal{D}_o) \subset FAM(\mathcal{D})$. Donc $\mathcal{D}_o$ est une réduction relative à $\mathcal{D}$ (voir II.4.4). Par le théorème des développements finis généralisés de II.4.4 et par II.2.2.7, on a $\mathcal{D}_o \leq \mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}$ est complète relative à $\mathcal{D}$. Par le théorème III.6.3, on a $(R,\mathcal{D})_o \leq (R,\mathcal{D})$. □

2.2.10. Proposition : Toute réduction f-complète est complète relative par rapport à elle-même.

Démonstration : Soit $\mathcal{D}$ f-complète. Nous raisonnons par récurrence sur la longueur n de $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D} = \mathcal{O}$, alors la proposition est triviale. Si $n > 0$, supposons que $\mathcal{D}$ est de la forme :

$$M = M_o \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2 \ldots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n = N$$

Alors nous affirmons qu'il n'existe pas $(R,\mathcal{D})$ tel que $(R,\mathcal{D}) \sim (R_i,\mathcal{D}_{[i-1]})$

avec $R_i \in \mathcal{F}_i$ pour un i tel que $1 \leq i \leq n$. En effet, supposons le contraire. On aurait $(R,\mathcal{D})_o = (R_i,\mathcal{D}_{[i-1]})_o$ par la définition III.6.2. Or, par récurrence, la réduction $\mathcal{D}_{[i-1]}$ est complète relative à elle-même et $(R,\mathcal{D})_o \leq (R_i,\mathcal{D}_{[i-1]})$ par le lemme précédent. Si on pose $(R_o,\mathcal{D}_o) = (R,\mathcal{D})_o$, on a donc $\mathcal{D}_o \leq \mathcal{D}_{[i-1]}$ par II.4.2.3. De plus, on a trivialement $\mathcal{D}_{[i-1]} \leq \mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}_o \leq \mathcal{D}_{[i-1]} \leq \mathcal{D}$ et, par III.6.3 et par II.4.2.6., il existe R' tel que $(R,\mathcal{D})_o \leq (R',\mathcal{D}_{[i-1]}) \leq (R,\mathcal{D})$. Donc $R \in R'/\mathcal{D}_{[i-1,n]}$ par II.4.2.3. En outre, on a $(R_i,\mathcal{D}_{[i-1]}) \sim (R,\mathcal{D})_o \sim (R',\mathcal{D}_{[i-1]})$ et $R' \in \mathcal{F}_i$ puisque $(\mathcal{F}_i,\mathcal{D}_{[i-1]})$ est f-complet. Le radical R' ne peut donc pas avoir de résidu dans N et on aboutit à une contradiction. La réduction $\mathcal{D}$ est telle qu'il n'existe pas $(R,\mathcal{D})$ tel que $[(R,\mathcal{D})] \in FAM(\mathcal{D})$ et la réduction $\mathcal{D}$ est complète relative à elle-même. □

<u>2.2.11. Corollaire</u> : Si $\mathcal{D}$ est f-complète, alors on a $(R,\mathcal{D})_o \leq (R,\mathcal{D})$ pour tout $(R,\mathcal{D})$.

<u>2.2.12. Proposition</u> : Une réduction éventuellement infinie est f-complète ssi elle est d-complète ssi elle est e-complète.

<u>Démonstration</u> : D'abord, une réduction est f-complète ssi elle est e-complète par III.6.4. Montrons que les réductions f-complètes et d-complètes coïncident. Cela repose sur 2.2.11 et III.6.3. En effet, pour tout $\mathcal{D}$ et $\mathcal{F}$ tel que $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ soit d-complet, on peut compléter $\mathcal{F}$ en un $\mathcal{F}'$ tel que $(\mathcal{F}',\mathcal{D})$ est f-complet, puisque la définition de d-complet implique trivialement $(R,\mathcal{D}) \sim (S,\mathcal{D})$ pour tout R et S de $\mathcal{F}$. Grâce à III.6.2., on peut parler sans ambiguité de $(\mathcal{F},\mathcal{D})_o$ comme représentant $(R,\mathcal{D})_o$ pour R quelconque dans $\mathcal{F}$, si $\mathcal{D}$ est f-complète ou d-complète. Nous affirmons que, lorsque $\mathcal{D}_o \leq \mathcal{D}$, un ensemble $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ est f-complet ssi $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ est d-complet, en posant $(R_o,\mathcal{D}_o) = (\mathcal{F},\mathcal{D})_o$. En effet, si $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ est f-complet, on a $(R_o,\mathcal{D}_o) \leq (R,\mathcal{D})$ pour tout R de $\mathcal{F}$ par III.6.3, puisque $\mathcal{D}_o \leq \mathcal{D}$. Considérons n'importe quel ensemble $\mathcal{F}'$ contenant $\mathcal{F}$ tel que $(\mathcal{F}',\mathcal{D})$ soit d-complet. On a aussi $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ puisqu'on peut compléter $\mathcal{F}'$ en un ensemble f-complet. Donc $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ et $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ est d-complet. Réciproquement, supposons $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ d-complet. On peut le compléter en $(\mathcal{F}',\mathcal{D})$ f-complet. Mais nous venons de voir qu'alors $(\mathcal{F}',\mathcal{D})$ est d-complet. Donc, comme $\mathcal{F}$ est maximal, on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ et $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ est f-complet. Finalement, grâce à 2.2.11, une réduction $\mathcal{D}$ est f-complète ssi $\mathcal{D}$ est d-complète (par récurrence sur n en considérant $\mathcal{D}_{[n]}$). □

Nous ne parlons donc plus que de réductions complètes.

2.3. Le sous-treillis des réductions complètes

2.3.1. Notation : Nous écrivons $(\mathcal{F},\mathcal{D}) \leq (\mathcal{F}',\mathcal{D}')$ ssi on a $\mathcal{F}' = \{R' \mid (R,\mathcal{D}) \leq (R',\mathcal{D}') \text{ et } R \in \mathcal{F}\}$. De même, nous posons $(R,\mathcal{D}) \leq (\mathcal{F}',\mathcal{D}')$ pour $(\{R\},\mathcal{D}) \leq (\mathcal{F}',\mathcal{D}')$.

2.3.2. Lemme : Si $(R,\mathcal{D})_o \leq (R,\mathcal{D})$ pour un $R \in \mathcal{F}$, si $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ est f-complet et si $(\mathcal{F},\mathcal{D}) \leq (\mathcal{F}',\mathcal{D}')$, alors $(\mathcal{F}',\mathcal{D}')$ est f-complet.

Démonstration : Par III.6.3, on a $(R,\mathcal{D})_o \leq (\mathcal{F},\mathcal{D})$. Donc $(R,\mathcal{D})_o \leq (\mathcal{F}',\mathcal{D}')$. Par conséquent, on a $(R',\mathcal{D}') \sim (S',\mathcal{D}')$ pour tout R' et S' de $\mathcal{F}'$. Soit $\mathcal{F}''$ f-complet contenant $\mathcal{F}$. On a $(R,\mathcal{D}) \sim (R'',\mathcal{D}')$ pour tout R de $\mathcal{F}$ et R'' de $\mathcal{F}''$, puisque $(\mathcal{F},\mathcal{D}) \leq (\mathcal{F}',\mathcal{D}')$. Donc $(R,\mathcal{D})_o = (R'',\mathcal{D}')_o \leq (\mathcal{F}'',\mathcal{D}')$ par III.6.3. puisque $\mathcal{D}_o \leq \mathcal{D} \leq \mathcal{D}'$ si on pose $(R,\mathcal{D})_o = (R_o,\mathcal{D}_o)$. Par II.4.2.6, on a donc $(R,\mathcal{D})_o \leq (\mathcal{F},\mathcal{D}) \leq (\mathcal{F}'',\mathcal{D}')$. D'où $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'$. □

2.3.3. Proposition : Les réductions complètes de $\mathcal{R}(M)$ forment un sous-demi-sup treillis du demi-sup treillis de II.2.4. Et toute paire de réductions complètes admet le même plus petit commun majorant que celui de II.2.4.

Démonstration : Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux réductions complètes issues de M, il suffit de montrer que $\mathcal{D}_1;(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}_2;(\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2)$ sont aussi deux réductions complètes. Ceci est évident grâce à 2.2.11 et au lemme précédent. □

2.3.4. Proposition : Les réductions complètes de $\mathcal{R}^\infty(M)$ forment un sous-treillis du treillis de 1.2.2.

Démonstration : Evidente d'après la proposition précédente. □

2.4. Coût d'une réduction

Conformément à la discussion de 2.1, nous définissons le coût d'une réduction parallèle.

2.4.1. Notation : Pour toute paire $(\mathcal{F},\mathcal{D})$, nous posons $FAM((\mathcal{F},\mathcal{D})) = \{[(R,\mathcal{D})] \mid R \in \mathcal{F}\}$ où $[(R,\mathcal{D})]$ est la classe d'équivalence de $(R,\mathcal{D})$ vis-à-vis de la relation $\sim$ (voir 2.2.7).

2.4.2. Définition : Le coût d'une réduction (parallèle et finie) $\mathcal{D}$, noté coût $(\mathcal{D})$, est défini récursivement par :

1) coût $(\mathcal{O}) = 0$
2) coût $(\mathcal{D}; M \overset{\mathcal{F}}{\to} N)$ = coût $(\mathcal{D})$ + card $(FAM((\mathcal{F},\mathcal{D})))$ où la quantité card(X) représente le nombre d'éléments de l'ensemble fini X.

Donc la contraction simultanée de radicaux de même famille a un coût unitaire et, formellement, si $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ est f-complet, on a coût $(\mathcal{D}; M \overset{\mathcal{F}}{\to} N)$ = coût$(\mathcal{D})$ + 1. Donc, si $\mathcal{D}$ est une réduction complète de longueur n, on a coût$(\mathcal{D})$ = n. De même, si $\mathcal{D}$ est une réduction non parallèle de longueur n, on a coût $(\mathcal{D})$ = n.

Remarquons en outre que cette définition induit un coût infini pour toute réduction infinie. Cela semble gênant pour pouvoir comparer leur coût. Une solution serait d'introduire le préordre $\mathcal{D} \leq_c \mathcal{D}'$ ssi $FAM(\mathcal{D}) \subset FAM(\mathcal{D}')$ (voir 2.2.7 et Berry-Lévy [8]). Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont des réductions complètes finies, cet ordre correspondrait à celui que nous avons introduit, grâce à 2.2.10. Nous ne considèrerons pas ce préordre ici, car alors la réduction de gauche critique serait optimale ! Nous verrons plus tard comment traiter le cas des réductions infinies.

2.5. Réduction complète associée à une réduction

2.5.1. Définition : La réduction la plus à droite relative à un ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux de M est la réduction $\mathcal{D}$

$$M = M_o \overset{R_1}{\to} M_1 \overset{R_2}{\to} M_2 \ldots \overset{R_n}{\to} M_n = N$$

telle que, pour tout i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$, on a
$R_i \in R'_i/\mathcal{D}_{[i-1]}$, $R_j \in R'_j/\mathcal{D}_{[j-1]}$ et $R'_i \in \mathcal{F}$ et $R'_j \in \mathcal{F}$ avec R'_j plus à gauche que R'_i.

Si $\mathcal{D}$ est une réduction $M \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} N$, nous noterons $ML(\mathcal{D})$, la réduction la plus à droite relative à $\mathcal{F}$.

Grâce à II.1.8.5, nous savons que la réduction précédente qui est une réduction relative particulière à un ensemble de radicaux se termine et est donc finie. De plus, si $\mathcal{F}$ contient n éléments, on peut vérifier aisément que la réduction précédente est de longueur n. Finalement, nous avons adopté la notation $ML(\mathcal{D})$, car c'est cette réduction qui est utilisée (de manière axiomatique) dans la démonstration classique du théorème de Church-Rosser due à Taït et Martin-Löf (voir Barendregt [1]).

2.5.2. Notation : Nous généralisons la définition précédente au cas où $\mathcal{D}$ est une réduction parallèle quelconque et nous posons $ML(\mathcal{D}_1;\mathcal{D}_2) = ML(\mathcal{D}_1)\ ;\ ML(\mathcal{D}_2)$.

2.5.3. Lemme : On a $\mathcal{D} \sim ML(\mathcal{D})$ et $FAM(\mathcal{D}) = FAM(ML(\mathcal{D}))$.

Démonstration : évidente.□

2.5.4. Définition : La *réduction complète associée à une réduction* $\mathcal{D}$ finie non parallèle est la réduction complète $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ définie par

$$\mathcal{C}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$$
$$\mathcal{C}(\mathcal{D};\ M \overset{R}{\rightarrow} N) = \mathcal{C}(\mathcal{D});\ P \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} Q \text{ où } \mathcal{F} = \{S \mid (R,\mathcal{D}) \sim (S,\mathcal{C}(\mathcal{D}))\}$$

De plus, si $\mathcal{D}$ est une réduction parallèle, nous posons $\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \mathcal{C}(ML(\mathcal{D}))$.

2.5.5. Lemme : Si $\mathcal{D}$ est une réduction complète

$$M = M_o \overset{\mathcal{F}_1}{\rightarrow} M_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\rightarrow} M_2 \ldots \overset{\mathcal{F}_n}{\rightarrow} M_n = N$$

alors, pour tout i et j tels que $1 \leq i < j$ et pour tout $R_i \in \mathcal{F}_i$ et $R_j \in \mathcal{F}_j$, on n'a pas $(R_i,\mathcal{D}_{[i-1]}) \sim (R_j,\mathcal{D}_{[j-1]})$. Donc $\text{coût}(\mathcal{D}) = \text{card}\ (FAM(\mathcal{D}))$ où $\text{card}(FAM(\mathcal{D}))$ est le nombre d'éléments de $FAM(\mathcal{D})$.

Démonstration : Supposons $1 \leq i < j$, $R_i \in \mathcal{F}_i$, $R_j \in \mathcal{F}_j$ et $(R_i, \mathcal{D}_{[i-1]}) \sim (R_j, \mathcal{D}_{[j-1]})$. Par 2.2.11, on a $(R_i, \mathcal{D}_{[i-1]})_o = (R_o, \mathcal{D}_o) \leq (R_i, \mathcal{D}_{[i-1]})$. De même, on a $(R_j, \mathcal{D}_{[j-1]})_o = (R_o, \mathcal{D}_o) \leq (R_j, \mathcal{D}_{[j-1]})$. Donc $\mathcal{D}_o \leq \mathcal{D}_{[i-1]} \leq \mathcal{D}_{[j-1]}$.

Et il existerait R'_j tel que $(R_o, \mathcal{D}_o) \leq (R'_j, \mathcal{D}_{i-1}) \leq (R_j, \mathcal{D}_{[j-1]})$. grâce à II.4.2.6. Donc $R_j \in R'_j/\mathcal{D}_{[i-1,j-1]}$ par II.4.2.3. D'où $R'_j \notin \mathcal{F}_i$. Or ceci est impossible, car on a aussi $(R_i, \mathcal{D}_{[i-1]}) \sim (R'_j, \mathcal{D}_{i-1})$. □

2.5.6. Proposition : On a $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}(\mathcal{D})$ et coût $(\mathcal{C}(\mathcal{D})) \leq$ coût$(\mathcal{D})$.

Démonstration : La réduction $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ est trivialement complète. Donc, par le lemme précédent, on a coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$ = card (FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$). Or on a aisément ML$(\mathcal{D}) \leqq \mathcal{C}(\mathcal{D})$ et FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D})) \subset$ FAM(ML$(\mathcal{D})$) par récurrence sur la longueur de ML$(\mathcal{D})$. Or, par 2.5.3, on a $\mathcal{D} \sim$ ML$(\mathcal{D})$ et FAM$(\mathcal{D})$ = FAM(ML$(\mathcal{D})$). D'où $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}(\mathcal{D})$ et FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D})) \subset$ FAM$(\mathcal{D})$. Donc coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D})) \leq$ card(FAM$(\mathcal{D})$). Et on a clairement card(FAM$(\mathcal{D})$) $\leq$ coût$(\mathcal{D})$ par la définition de coût. □

La réduction $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ va donc plus loin que $\mathcal{D}$, pour un coût inférieur. On a donc toujours intérêt à travailler dans l'espace des réductions complètes.

2.6. Réductions optimales par rapport à une approximation

Soit $a \in \bar{\mathcal{A}}(M)$ une approximation de M, on essaie de caractériser les réductions $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(M)$ qui dépassent a, c'est-à-dire telle que $a \leq \omega(\mathcal{D})$, en un coût minimal. Intuitivement, les réductions complètes qui contractent les radicaux de gauche "critiques pour a" semblent candidates.

2.6.1. Définition : Si $a \in \bar{\mathcal{A}}(M)$ est tel que $\mathrm{Min}(\omega(M), a) \neq a$ (voir IV.2.2.6), *le radical de gauche critique pour l'approximation a,* noté $GC_a(M)$, est défini par :

1) $GC_a(M) = R$ si $\omega(M) = \Omega \neq a$ et si R est le radical de tête de M.

2) $GC_a(M) = GC_{a_i}(M_i)$ si $M = \lambda x_1x_2...x_m \cdot x\ M_1M_2...M_n$, si $a = \lambda x_1x_2...x_m \cdot x\ a_1a_2...a_n$ et si i est minimum tel que $1 \leq i \leq n$ et $Min(\omega(M_i),a_i) \neq a_i$.

La *réduction de gauche critique pour l'approximation a* est la réduction qui ne contracte que des radicaux de gauche critiques pour a. Nous notons $\mathcal{D}_a(M)$ cette réduction.

Remarquons que l'on a $Min(\omega(M),a) \neq a$ ssi $a \not\leq \omega(M)$. En outre, nous savons que $\mathcal{D}_a(M)$ est finie par IV.2.4.4 et on a $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$ ssi $a \sqsubseteq Val(\mathcal{D})$ pour toute réduction $\mathcal{D}$ de $\mathcal{R}^{\infty}(M)$ toujours par IV.2.4.4. Nous allons voir que cette réduction $\mathcal{D}_a(M)$ se complète bien.

2.6.2. Définition : La *réduction de gauche complète critique pour a* $\in \bar{\mathcal{A}}(M)$ est la réduction complète issue de M qui contracte à chaque étape l'ensemble f-complet de radicaux qui contient le radical de gauche critique pour a. Notons $\bar{\mathcal{D}}_a(M)$ cette réduction.

2.6.3. Lemme : Soit $\mathcal{D}$ une réduction $M \overset{*}{\rightarrow} N$ et $a \in \bar{\mathcal{A}}(M)$.

1) $GC_a(M)/\mathcal{D} = \{GC_a(N)\}$ si $\mathcal{D}$ est la réduction $M \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} N$ et $GC_a(M) \notin \mathcal{F}$

2) $\mathcal{D}_a(M)/\mathcal{D} = \mathcal{D}_a(N)$

Démonstration : analogue à 1.3.5.

1) Si $\omega(M) = \Omega$, alors $\Omega \neq a$ puisque $Min(\omega(M),a) \neq a$. Et $GC_a(M) = R$ où R est le radical de tête de M. Comme $R \notin \mathcal{F}$, l'expression N n'est pas en f.n.t et contient un radical de tête S. De plus, on a $R/\mathcal{D} = \{S\}$. Donc, comme $\omega(N) = \Omega \neq a$, on a $S = GC_a(N)$. Si $M = \lambda x_1x_2...x_m \cdot x\ M_1M_2...M_n$, comme $Min(\omega(M),a) \neq a$ et $a \in \bar{\mathcal{A}}(M)$, on a $a = \lambda x_1x_2...x_m \cdot x\ a_1a_2...a_n$ et il existe un i minimum entre 1 et n tel que $Min(\omega(M_i),a_i) \neq a_i$. Par définition $GC_a(M) = GC_{a_i}(M_i)$. Or $N = \lambda x_1x_2...x_m \cdot x\ N_1N_2...N_n$ et $M_k \overset{*}{\rightarrow} N_k$ pour tout k. Par récurrence sur la taille, on a $GC_{a_i}(M_i)/\mathcal{D}_i = \{GC_{a_i}(N_i)\}$ si $\mathcal{D}_i$ est la réduction $M_i \overset{\mathcal{F}_i}{\rightarrow} N_i$ où $\mathcal{F}_i$ est le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ des radicaux contenus dans M_i. Or, pour tout j tel que $1 \leq j < i$, on a $Min(\omega(M_j),a_j) = a_j$ et

donc $\mathrm{Min}(\omega(N_j), a_j) = a_j$ puisque $\omega(M_j) \leq \omega(N_j)$ par IV.2.3.2. On a donc $GC_a(N) = GC_{a_i}(N_i)$.

2) Par récurrence sur $<n,\ell>$ en se servant de la première partie si n et ℓ sont les longueurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_a(M)$. □

2.6.4. Lemme : Si $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$, alors $\mathrm{FAM}(\mathcal{D}_a(M)) \subset \mathrm{FAM}(\mathcal{D})$.

Démonstration : Par récurrence sur la longueur de $\mathcal{D}_a(M)$. Le cas où $\mathcal{D}_a(M) = \mathcal{O}$ est trivial. Si $\mathcal{D}_a(M) = (\mathcal{D}' \; ; \; P \overset{R}{\rightarrow} Q)$, alors $R = GC_a(P)$. Or $\mathcal{D}' \leq \mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$ et, par récurrence, on a $\mathrm{FAM}(\mathcal{D}') \subseteq \mathrm{FAM}(\mathcal{D})$. Posons $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}'$. Comme $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$, on a $R/\mathcal{D}_1 = \emptyset$. Si $\mathcal{D}_1$ ne développe pas R (voir IV.4.2.3), alors $R/\mathcal{D}_1 = \{GC_a(N)\} \neq \emptyset$ si $\mathcal{D}$ est de la forme $M \overset{*}{\rightarrow} N$ par 2.6.3. Donc $\mathcal{D}_1$ développe R et on a $[(R,\mathcal{D}')] \in \mathrm{FAM}(\mathcal{D})$ en appliquant trivialement la définition de FAM et de $\sim$ et en se servant de II.2.2.6. □

2.6.5. Proposition : On a $\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)) = \bar{\mathcal{D}}_a(M)$.

Démonstration : Par récurrence sur la longueur de $\mathcal{D}_a(M)$. Le cas où $\mathcal{D}_a(M) = \mathcal{O}$ est trivial. Si $\mathcal{D}_a(M) = \mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}_2$ où $\mathcal{D}_1$ est de la forme $M \overset{*}{\rightarrow} M_1$ et $\mathcal{D}_2$ de la forme $M_1 \overset{R}{\rightarrow} N$, alors $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_a(M_1)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)) = \mathcal{C}(\mathcal{D}_1) \; ; \; P_1 \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} Q$ où $\mathcal{F} = \{S \,|\, (R,\mathcal{D}_1) \sim (S,\mathcal{C}(\mathcal{D}_1))\}$. Or $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$ par 2.5.6 et $(\mathcal{D}_1 ; (\mathcal{C}(\mathcal{D}_1)/\mathcal{D}_1)) \sim \mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$ par II.2.2.6. Considérons les ensembles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}'$ tels que $(R,\mathcal{D}_1) \leq (\mathcal{F}_1,\mathcal{C}(\mathcal{D}_1))$ (voir 2.3.1) et $\mathcal{F}' = \{S \,|\, (S,\mathcal{C}(\mathcal{D}_1)) \sim (R_1,\mathcal{C}(\mathcal{D}_1))$ et $R_1 \in \mathcal{F}_1\}$. On a $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. En effet, par 2.6.3, comme $R = GC_a(M_1)$ on ne peut avoir que deux cas. Soit $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ et alors $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$. Donc, par 2.6.3., on a $\mathrm{FAM}(\mathcal{D}_a(M)) \subset \mathrm{FAM}(\mathcal{C}(\mathcal{D}_1))$ et $\mathcal{F} = \emptyset$ par 2.5.5. (Donc $\mathcal{F}' = \emptyset$ puisqu'on a toujours $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$). Soit $\mathcal{F}_1 = \{GC_a(P_1)\}$ et alors $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$. De plus, l'ensemble $\mathcal{F}$ est l'ensemble f-complet qui contient $GC_a(P_1)$. Enfin, quand $\mathcal{D}_a(M)$ se termine, on a $a \leq \omega(\mathcal{D}_a(M))$ et donc $a \leq \omega(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)))$ puisque $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$. □

2.6.6. Proposition : Pour tout $a \in \bar{\mathcal{A}}(M)$ et pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(M)$, tel que $a \leq \omega(\mathcal{D})$, on a :

1) $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$ (et réciproquement $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D} \Longrightarrow a \leq \omega(\mathcal{D})$)

2) $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)) \leq \mathcal{C}(\mathcal{D})$

3) $a \leq \omega(\mathcal{D}_a(M)) \leq \omega(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))) \leq \omega(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$

4) Coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))) \leq$ coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D})) \leq$ coût$(\mathcal{D})$.

Autrement dit, la réduction de gauche complète critique pour a est optimale par rapport à a.

Démonstration :

1) Déjà démontré en IV.2.4.4.

2) On a $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$ par 2.5.6. Donc FAM$(\mathcal{D}_a(M)) \subset$ FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)))$ par 2.6.4. Or la définition de $\mathcal{C}$ en 2.5.4. implique FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))) \subset$ FAM$(\mathcal{D}_a(M))$. Donc FAM$(\mathcal{D}_a(M)) =$ FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)))$. Donc, par 2.2.10, la réduction $\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$ est complète relative à $\mathcal{D}_a(M)$, c'est-à-dire relative à FAM$(\mathcal{D}_a(M))$. Or on a aussi $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$ par la partie 1. Donc $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{C}(\mathcal{D})$ par 2.5.6. Ce qui implique FAM$(\mathcal{D}_a(M)) \subset$ FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$ par 2.6.4. Or, par 2.2.10, la réduction $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ est complète relative à elle-même, c'est-à-dire relative à FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$. Donc $\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$ est une réduction relative à $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ particulière et, par le théorème des développements finis généralisés de II.4.4.6, on a $\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)) \leq \mathcal{C}(\mathcal{D})$.

3) On a $a \leq \omega(\mathcal{D}_a(M))$ par IV.2.4.4. Le reste provient trivialement de la partie 2 en se servant de IV.2.3.2.

4) Par 2.5.5, on a coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)))$ = card(FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)))$). Donc coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M)))$ = card(FAM$(\mathcal{D}_a(M))$) par le raisonnement de la partie 2. De même coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$ = card(FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$). Or dans la partie 2, nous avons vu que FAM$(\mathcal{D}_a(M)) \subset$ FAM$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$. Donc coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))) \leq$ coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$. Par ailleurs, on a coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D})) \leq$ coût$(\mathcal{D})$ par 2.5.6. $\square$

Mais, nous allons caractériser exactement les réductions complètes optimales par rapport à une approximation.

2.6.7. Définition : Si a $\in \bar{\mathcal{A}}(M)$, nous dirons que l'*ensemble* $\mathcal{F}$ *de radicaux* est *critique par rapport à l'approximation* a ssi a $\cap$ $M[\mathcal{F}/\Omega] \neq$ a. Une réduction qui ne contracte que des ensembles de radicaux critiques pour a est une *réduction critique par rapport à l'approximation* a.

Pour la définition de $\cap$, nous nous reportons à IV.3.1.4. Remarquons qu'une expression M peut ne contenir aucun ensemble $\mathcal{F}$ critique pour a $\in \bar{\mathcal{A}}(M)$. On montre trivialement que cela se produit ssi a $\leq \omega(M)$. Une réduction $\mathcal{D}$ critique pour a se terminera ssi son expression finale ne contient aucun ensemble critique pour a.

2.6.8. Proposition : Un ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux de M est critique pour a $\in \bar{\mathcal{A}}(M)$ ssi la réduction $\mathcal{D}_a(M)$ développe $\mathcal{F}$.

Démonstration : analogue à celle de 1.4.2.□

2.6.9. Proposition : Toute réduction $\mathcal{D}$ critique par rapport à une approximation a est finie et se termine en donnant une valeur plus grande que a.

Démonstration : Par 2.6.8 et 2.6.3, on a clairement $|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{D}_a(M)|$ si $\mathcal{D}$ est issue de M et si $|\mathcal{D}|$ et $|\mathcal{D}_a(M)|$ sont les longueurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_a(M)$. On a $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$ aussi par 2.6.3. Donc a $\leq \omega(\mathcal{D})$.□

Les réductions critiques par rapport à une approximation (finie) ont donc un comportement différent des réductions critiques de 1.4.3.

2.6.10. Théorème : Toute réduction $\mathcal{D}$ complète et critique par rapport à une approximation a $\in \bar{\mathcal{A}}(M)$ est optimale, c'est-à-dire, pour tout $\mathcal{D}'$ tel que a $\leq \omega(\mathcal{D}')$, on a

1) $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}(\mathcal{D}')$

2) a $\leq \omega(\mathcal{D}) \leq \omega(\mathcal{C}(\mathcal{D}'))$

3) coût$(\mathcal{D}) \leq$ coût$(\mathcal{C}(\mathcal{D}')) \leq$ coût$(\mathcal{D}')$

Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est une réduction complète optimale par rapport à a, c'est-à-dire a $\leq \omega(\mathcal{D})$ et coût($\mathcal{D}$) $\leq$ coût($\mathcal{D}'$) pour tout $\mathcal{D}'$ tel que a $\leq \omega(\mathcal{D}')$, alors $\mathcal{D}$ est critique pour a.

<u>Démonstration</u> : Supposons $\mathcal{D}$ complète et critique pour a. Par 2.6.8 et 2.6.3, on obtient FAM($\mathcal{D}$) $\subset$ FAM($\mathcal{D}_a$(M)). De plus, par 2.6.9, on a a $\leq \omega(\mathcal{D})$. Donc $\mathcal{D}_a(M) \leq \mathcal{D}$ et FAM($\mathcal{D}$) = FAM($\mathcal{D}_a$(M)) par 2.6.4. Comme FAM($\mathcal{D}_a$(M)) = FAM($\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$) (voir démonstration de 2.6.6), les réductions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$ sont deux réductions complètes relatives à $\mathcal{D}_a$(M) grâce à 2.2.10. D'où $\mathcal{D} \sim \mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$ par le théorème II.4.4.6. De plus coût($\mathcal{D}$) = coût($\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$) par 2.5.5. La proposition 2.6.6 nous induit donc les inégalités 1,2 et 3. Réciproquement, il suffit de considérer $\mathcal{D}' = \mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$. On a donc coût($\mathcal{D}$) $\leq$ coût($\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$). Comme a $\leq \omega(\mathcal{D})$, on a coût($\mathcal{D}$) = coût($\mathcal{C}(\mathcal{D}_a(M))$) par 2.6.6. On en conclut que $\mathcal{D}$ est critique pour a car sinon il existerait un n tel que $\mathcal{D}_{[n]}$; $(\mathcal{D}_a(M)/\mathcal{D}_{[n]})$ serait strictement meilleure que $\mathcal{D}$ par un raisonnement analogue à 2.6.8. □

Rappelons que la forme normale d'une expression en est une approximation particulière. Nous venons donc de montrer que la réduction normale complète, ainsi que les différentes stratégies de 1.4 retraduites sous forme de réductions complètes, sont optimales pour obtenir la forme normale. Mais, nous nous intéressons aussi aux expressions sans forme normale.

<u>2.7. Réductions optimales</u>

Nous reprenons une définition de Vuillemin [42].

<u>2.7.1. Définition</u> : Une réduction $\mathcal{D}$ (éventuellement infinie) issue de M est *uniformément optimale* ssi, pour toute approximation a $\in \bar{\mathcal{A}}(M)$ et pour toute réduction $\mathcal{D}'$ finie telle que a $\leq \omega(\mathcal{D}')$, il existe un n ≥ 0 tel que a $\leq \omega(\mathcal{D}_{[n]})$ et coût ($\mathcal{D}_{[n]}$) $\leq$ coût($\mathcal{D}'$).

<u>2.7.2. Proposition</u> : En général, il n'existe pas de réduction uniformément optimale.

Démonstration : Soit $M = x(Ix)(Ix)$ où $I = \lambda y{\cdot}y$ et R et S sont les deux radicaux de M. Il n'y a que trois réductions issues de M, c'est-à-dire $M \overset{R}{\to} M_1 = xx(Ix) \to N = xxx$, $M \overset{S}{\to} M_2 = x(Ix)x \to N$ et $M \overset{\mathcal{F}}{\to} N$ si $\mathcal{F} = \{R,S\}$. On vérifie aisément qu'aucune de ces réductions est uniformément optimale.□

Vuillemin [42] échappe à ce problème en introduisant un concept de séquentialité qui force le calcul d'un argument quand on est dans la situation correspondant aux f.n.t dans les programmes récursifs. Nous faisons la définition suivante.

2.7.3. Définition : Une *direction d'une expression* M est toute chaîne X strictement croissante de $\bar{\mathcal{A}}(M)$. Une direction X est correcte ssi $\bigsqcup X \equiv M$. La direction d'une réduction $\mathcal{D}$ (éventuellement infinie) est l'ensemble $X = \{\omega(\mathcal{D}_{[n]}) \mid n \geq 0\}$.

2.7.4. Définition : Une *réduction* $\mathcal{D}$ (éventuellement infinie) issue de M est *optimale par rapport à la direction* X de M ssi, pour tout $a \in X$, il existe un $n \geq 0$ tel que $\mathcal{D}_{[n]}$ soit optimale par rapport à l'approximation a.

2.7.5. Définition : Un ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux de M est critique par rapport à la direction X de M ssi $\mathcal{F}$ est critique par rapport à $a \in X$ minimum tel que $a \cap \omega(M) \not\equiv a$. Un ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux de M est crucial par rapport à la direction X de M ssi $a \cap M[\mathcal{F}\backslash\Omega] \equiv \omega(M)$ où $a \in X$ est minimum tel que $a \cap \omega(M) \not\equiv a$.

Toute réduction qui ne contracte que des ensembles de radicaux critiques (respectivement cruciaux) par rapport à une direction donnée est une réduction critique (respectivement sûre) par rapport à cette direction.

2.7.6. Théorème : Toute réduction $\mathcal{D}$ (éventuellement infinie) issue de M, complète et critique par rapport à une direction X de M est optimale par rapport à X.

Démonstration : Il suffit de montrer que, pour tout $a \in X$, il existe un $n \geq 0$ tel que $\mathcal{D}_{[n]}$ est complète et critique par rapport à a, grâce à 2.6.10. Nous raisonnons par récurrence dans X. Considérons b $\in$ X tel que b est maximum et b $\sqsubseteq$ a et b $\neq$ a. Par récurrence, il existe $\mathcal{D}_{[m]}$ tel que $\mathcal{D}_{[m]}$ est critique pour b. Donc $\mathcal{D}_{[m]}$ est critique pour a, puisque a $\sqsubseteq$ b et b $\sqsubseteq$ $M[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ impliquent a $\sqsubseteq$ $M[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ pour tout M et $\mathcal{F}$. On a donc b $\sqsubseteq$ $\omega(\mathcal{D}_{[m]})$ grâce à 2.6.9. Et, par définition, si $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{[m]}; \mathcal{D}')$, la réduction $\mathcal{D}'$ débute par une réduction critique pour a. Il existe donc $n \geq m \geq 0$ tel que $\mathcal{D}_{[n]}$ est critique (et complète) par rapport à a, grâce à 2.6.9.□

2.7.7. <u>Proposition</u> : Toute réduction $\mathcal{D}$ (éventuellement infinie) issue de M, complète et sûre par rapport à une direction X de M est optimale par rapport à X.

<u>Démonstration</u> : par 2.7.6 car toute réduction sûre par rapport à X est critique par rapport à X. □

2.7.8. <u>Proposition</u> : Toute réduction $\mathcal{D}$ issue de M optimale par rapport à une direction X de M n'est pas forcément optimale dans sa direction.

<u>Démonstration</u> : Posons $M = (\lambda y \cdot x(K(ya)b)y)(II)$, $K = \lambda xy \cdot x$ et $I = \lambda x \cdot x$. Alors $M \overset{*}{\to} x\ a\ I$. Considérons la direction $X = \{\Omega, x\Omega\Omega, xa\Omega\}$. La réduction $M \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to N$ est optimale par rapport à X, où $M_1 = x(K(IIa)b)(II)$, $M_2 = x(IIa)(II)$, $M_3 = x(Ia)\ I$ et $N = x\ a\ I$. Or la direction Y de $\mathcal{D}$ est l'ensemble $\{\Omega, x\Omega\Omega, x\Omega I, xaI\}$ et $\mathcal{D}_{[3]}$ n'est pas optimal pour $x\Omega I$.□

On peut se demander quel est l'intérêt pratique du théorème 2.7.6. On peut remarquer que rien ne nous empêche de considérer une direction correcte et il existe donc des réductions optimales et correctes. Tout le problème consiste donc à deviner une direction correcte. Cela est impossible puisque la relation $M \neq \Omega$ est indécidable (voir Wadsworth [44]). On peut donc retenir que les stratégies de la fin de 1.4 retraduites sous forme de réductions complètes et modifiées dans le cas où $M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m \cdot x\ M_1 M_2 \ldots M_n$ en réduisant aléatoirement un des M_i sont de bonnes stratégies en moyenne. Remarquons une nouvelle fois que, si M a une forme normale, toutes les directions maximales de M sont correctes et qu'alors il suffit de considérer toute réduction optimale par rapport à ces directions pour obtenir la forme normale en un coût optimal.

CONCLUSION

Nous n'avons pas résolu un certain nombre de problèmes. Le plus important d'entre eux est donc de trouver une implémentation pratique correspondant aux réductions optimales que nous avons montrées au chapitre V. Il semble a priori qu'une telle implémentation existe et ne doit pas être très compliquée, puisque le mécanisme d'étiquetage qui correspond à la notion de famille n'est pas très complexe.

Il serait également intéressant de trouver une relation opérationnelle extensionnelle simple correspondant à notre interprétation du chapitre IV, mais il est vraisemblable que cette relation fait intervenir des δ-règles (voir Church [11]). Par δ-règle, on entend des réductions de la forme $\delta\, M_1 M_2 \ldots M_n \to N$ où δ est une constante et $M_1, M_2, \ldots M_n, N$ sont des expressions quelconques (On se place alors dans un λ-calcul étendu par la présence de quelques constantes). Le problème est alors de veiller à ce que la propriété Church-Rosser soit toujours vraie.

Comme prolongements, on peut d'abord se demander si ce que nous avons fait reste vrai dans des systèmes de réécriture plus généraux que le λ-calcul. Une manière adéquate de faire cette extension semble être une méthode axiomatique dans des systèmes de remplacement d'arbres similaires à ceux de Rosen [50] et O'Donnell [31]. Peut-on définir aisément la notion de famille de radicaux dans de tels systèmes ? Peut-on se servir de prédicats bornés pour prouver des propriétés syntaxiques non connues ? Par exemple, le λ-calcul avec la β-règle et une δ-règle de la forme $\delta MM \to M$ dont l'aspect Church-Rosser est inconnu (problème soulevé par Mann et Hindley) ?

On peut également essayer de refaire la construction du chapitre IV en ajoutant de nouvelles règles de réécriture.

APPENDICE 1

COMMENT TROUVER LE λ-CALCUL ETIQUETE

Nous sommes partis du λ-calcul de Hyland [13] et Wadsworth [44] qui est une version syntaxique de la construction du modèle D_∞ de Scott [37]. Nous rappelons ce λ-calcul.

Expressions : Comme dans Λ, mais toutes les sous-expressions admettent un entier comme exposant. Formellement, on considère l'ensemble Λ' contenant

$$\begin{cases} x^n & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ est une variable} \\ (\lambda x.U)^n & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ et } U \in \Lambda' \text{ et } x \text{ est une variable} \\ (UV)^n & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ et } U,V \in \Lambda' \end{cases}$$

Projection : Pour $U \in \Lambda'$ et $n \in \mathbb{N}$, l'opération $U_{[n]}$ est définie par

$$\begin{cases} {x^n}_{[m]} = x^p \\ {(\lambda x \cdot U)^n}_{[m]} = (\lambda x \cdot U)^p \\ {(UV)^n}_{[m]} = (UV)^p \end{cases}$$

où $p = \inf\{m,n\}$

Substitution : En ignorant les problèmes de α-conversion, on définit $U[x\backslash V]$ par

$$\begin{cases} x^n[x\backslash V] = V_{[n]} \\ y^n[x\backslash V] = y^n \quad \text{si } y \neq x \\ (\lambda y \cdot U)^n\ [x\backslash V] = (\lambda y \cdot U[x\backslash V])^n \\ (U_1U_2)^n\ [x\backslash V] = (U_1[x\backslash V]\ \ U_2[x\backslash V])^n \end{cases}$$

Conversion : Toute sous-expression de la forme $((\lambda x \cdot U)^{n+1}\ V)^m$ est remplacée par $U[x\backslash V_{[n]}]_{[n][m]}$.

Le degré d'un radical $((\lambda x \cdot U)^n V)^m$ est n et la conversion n'est donc définie que pour les radicaux de degré non nul. En fait, Wadsworth [24] considère également une règle pour le cas d'un degré nul en introduisant une constante Ω. Mais nous avons montré en [23] que ce λ-calcul avait la propriété Church-Rosser.

Nous essayons de généraliser cette propriété Church-Rosser en considérant un système arbitraire d'exposants.

Expressions : Nous considérons un ensemble Λ_E contenant

$$\begin{cases} x^\alpha & \text{si } \alpha \in E \text{ et } x \text{ variable} \\ (\lambda x \cdot U)^\alpha & \text{si } \alpha \in E,\ U \in \Lambda_E \text{ et } x \text{ variable} \\ (UV)^\alpha & \text{si } \alpha \in E \text{ et } U, V \in \Lambda_E \end{cases}$$

Projection : Pour $U \in \Lambda_E$ et $\alpha \in E$, l'opération $f(\alpha, U)$ est définie par

$$f(\alpha, x^\beta) = x^\gamma$$
$$f(\alpha, (\lambda x \cdot U)^\beta) = (\lambda x \cdot U)^\gamma$$
$$f(\alpha, (UV)^\beta) = (UV)^\gamma$$

où $\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$.

Substitution : Comme plus haut, on pose

$$\begin{cases} x^\alpha[x\backslash V] = f(\alpha, V) \\ y^\alpha[x\backslash V] = y^\alpha \quad \text{si } y \neq x \\ (\lambda y \cdot U)^\alpha\, [x\backslash V] = (\lambda y \cdot U[x\backslash V])^\alpha \\ (U_1 U_2)^\alpha\, [x\backslash V] = (U_1[x\backslash V]\ U_2[x\backslash V])^\alpha \end{cases}$$

Conversion : Toute sous-expression de la forme $((\lambda x \cdot U)^\alpha V)^\beta$ est remplacée par $h(\alpha, \beta, U\, [x\backslash g(\alpha, \beta, V)])$ si un prédicat $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ est vérifié.

Il ne nous reste plus qu'à trouver des fonctions f (c'est-à-dire φ), g et h et un prédicat $\mathcal{P}$ rendant ce λ-calcul Church-Rosser.

Nous faisons une hypothèse simplificatrice qui fait que g et h ont un effet local.

Hypothèse simplificatrice 1 :

$$\begin{cases} g(\alpha,\beta,\ x^{\gamma}) = x^{\delta} \\ g(\alpha,\beta,\ (\lambda x\cdot U)^{\gamma}) = (\lambda x\cdot U)^{\delta} \\ g(\alpha,\beta,\ (UV)^{\gamma}) = (UV)^{\delta} \end{cases} \qquad \begin{cases} h(\alpha,\beta,\ x^{\gamma}) = x^{\varepsilon} \\ h(\alpha,\beta,\ (\lambda x\cdot U)^{\gamma}) = (\lambda x.U)^{\varepsilon} \\ h(\alpha,\beta,\ (UV)^{\gamma}) = (UV)^{\varepsilon} \end{cases}$$

où $\delta = \chi(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\varepsilon = \psi(\alpha,\beta,\gamma)$.

Nous essayons de montrer que si R et S sont deux radicaux de U et si $U \overset{R}{\to} V$ et $U \overset{S}{\to} W$, alors il existe X tel que $V \overset{*}{\to} X$ et $W \overset{*}{\to} X$. Nous allons faire cette démonstration par buts successifs. Dans un premier temps, nous ignorons le prédicat $\mathcal{P}$ et nous supposons donc $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$ vrai pour tout α et β.

But 1 : Si $U \to V$ et $U \to W$, alors il existe X tel que $V \overset{*}{\to} X$ et $W \overset{*}{\to} X$.

Démonstration : On se ramène au cas où $U = ((\lambda x\cdot U_1)^{\alpha} U_2)^{\beta}$ et $V = h(\alpha,\beta,\ U_1[x\backslash g(\alpha,\beta,\ U_2)])$ et $W = ((\lambda x\cdot W_1)^{\alpha}\ W_2)^{\beta}$ avec soit $U_1 \to W_1$ et $U_2 = W_2$, soit $U_1 = W_1$ et $U_2 \to W_2$. Il suffit alors d'avoir

$h(\alpha,\beta,\ U_1[x\backslash g(\alpha,\beta,\ U_2)]) \overset{*}{\to} h(\alpha,\beta,\ W_1[x\backslash g(\alpha,\beta,\ W_2)])$.□

Nous subdivisons ce sous-but en quatre parties :

1.1. : Si $V \to W$, alors $U[x\backslash V] \overset{*}{\to} U[x\backslash W]$

1.2. : Si $U \to V$, alors $U[x\backslash W] \overset{*}{\to} V[x\backslash W]$

1.3. : Si $U \to V$, alors $h(\alpha,\beta,\ U) \overset{*}{\to} h(\alpha,\beta,\ V)$

1.4. : Si $U \to V$, alors $g(\alpha,\beta,\ U) \overset{*}{\to} g(\alpha,\beta,\ V)$.

But 1.1. : Démonstration : Par récurrence sur $||U||$, on se ramène à $U = x^{\alpha}$. Donc le but 1.1 est équivalent au but 1.5 suivant

1.5. : Si $U \to V$, alors $f(\alpha,U) \overset{*}{\to} f(\alpha,V)$. □

<u>But 1.2.</u> <u>Démonstration</u> : Par récurrence sur $||U||$, on se ramène à $U = ((\lambda y\cdot U_1)^{\alpha}U_2)^{\beta} \to V = h(\alpha,\beta,\ U_1[y\backslash g(\alpha,\beta,\ U_2)])$. Alors $U[x\backslash W] = ((\lambda y\cdot U_1')^{\alpha}\ U_2')^{\beta}$ où $U_1' = U_1[x\backslash W]$ et $U_2' = U_2[x\backslash W]$. Il suffit donc d'avoir

$$h(\alpha,\beta,\ U_1[y\backslash g(\alpha,\beta,\ U_2)])\ [x\backslash W] = h(\alpha,\beta,U_1'[y\backslash g(\alpha,\beta,\ U_2')]).$$

Nous subdivisons cette formule dans les trois nouveaux sous-buts.

1.6. : $U[x\backslash V][y\backslash W] = U[y\backslash W][x\backslash V[y\backslash W]]$ où $y \neq x$ et x n'est pas libre dans W.

1.7. : $g(\alpha,\beta,\ U)\ [x\backslash V] = g(\alpha,\beta,\ U[x\backslash V])$

1.8. : $h(\alpha,\beta,\ U)\ [x\backslash V] = h(\alpha,\beta,\ U[x\backslash V])$

Ces trois sous-buts suffisent à démontrer 1.2.□

<u>But 1.3.</u> <u>Démonstration</u> : Par récurrence sur $||U||$, on se ramène à $U = ((\lambda x\cdot U_1)^{\gamma}U_2)^{\delta} \to V = h(\gamma,\delta,\ U_1[x\backslash g(\gamma,\delta,\ U_2)])$. Or $h(\alpha,\beta,\ U) \to V' = h(\gamma,\varepsilon,\ U_1[x\backslash g(\gamma,\varepsilon,\ U_2)])$ où $\varepsilon = \psi(\alpha,\beta,\delta)$. Il suffit de montrer $V' = h(\alpha,\beta,\ V)$. Or cette relation revient exactement à satisfaire les deux équations suivantes pour tout $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ de E.

(1) $\qquad \psi(\alpha,\beta,\psi(\gamma,\delta,\varepsilon)) = \psi(\gamma,\psi(\alpha,\beta,\delta),\varepsilon)$

(2) $\qquad \chi(\gamma,\delta,\varepsilon) = \chi(\gamma,\psi(\alpha,\beta,\delta),\varepsilon)$.□

<u>But 1.4.</u> <u>Démonstration</u> : Comme précédemment, on se ramène à $U = ((\lambda x\cdot U_1)^{\gamma}U_2)^{\delta} \to V = h(\gamma,\delta,\ U_1[x\backslash g(\gamma,\delta,\ U_2)])$. Or $g(\alpha,\beta,\ U) \to V' = h(\gamma,\varepsilon,\ U_1[x\backslash g(\gamma,\varepsilon,\ U_2)])$ où $\varepsilon = \chi(\alpha,\beta,\delta)$. Il suffit de montrer $V' = g(\alpha,\beta,\ V)$. Or cette relation revient exactement à satisfaire les deux équations suivantes pour tout $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ de E.

(3) $\chi(\alpha,\beta,\psi(\gamma,\delta,\varepsilon)) = \psi(\gamma,\chi(\alpha,\beta,\delta),\varepsilon)$

(4) $\chi(\gamma,\delta,\varepsilon) = \chi(\gamma,\chi(\alpha,\beta,\delta),\varepsilon)$

<u>But 1.5</u> : <u>Démonstration</u> : A nouveau, on se ramène à $U = ((\lambda x{\cdot}U_1)^{\beta}U_2)^{\gamma} \to V = h(\beta,\gamma,\ U_1[x\backslash g(\beta,\gamma,\ U_2)])$. Or $f(\alpha,\ U) \to V' = h(\beta,\varepsilon,\ U_1[x\backslash g(\beta,\varepsilon,\ U_2)])$ où $\varepsilon = \varphi(\alpha,\gamma)$. Il suffit de montrer $V' = f(\alpha,\ V)$, ce qui revient exactement à satisfaire les deux équations suivantes pour

(5) $\varphi(\alpha,\psi(\beta,\gamma,\delta)) = \psi(\beta,\varphi(\alpha,\gamma),\delta)$

(6) $\chi(\beta,\gamma,\delta) = \chi(\beta,\varphi(\alpha,\gamma),\delta)$ □

<u>But 1.6</u> : <u>Démonstration</u> : Par récurrence sur $||U||$, on se ramène exactement au cas où $U = x^{\alpha}$ et donc à un nouveau but

1.9 : $f(\alpha,\ V)\ [y\backslash W] = f(\alpha,\ V[y\backslash W])$ □

<u>But 1.7, 1.8, 1.9</u> : <u>Démonstration</u> : On se ramène par récurrence à satisfaire exactement les trois équations suivantes :

(7) $\varphi(\chi(\alpha,\beta,\gamma),\delta) = \chi(\alpha,\beta,\ \varphi(\gamma,\delta))$

(8) $\varphi(\psi(\alpha,\beta,\gamma),\delta) = \psi(\alpha,\beta,\ \varphi(\gamma,\delta))$

(9) $\varphi(\varphi(\alpha,\beta),\gamma) = \varphi(\alpha,\varphi(\beta,\gamma))$ □

On a donc neuf équations qui suffisent à démontrer la propriété de permutation exprimée dans le but 1. En fait, ces équations suffisent à assurer la propriété Church-Rosser en effectuant le même raisonnement avec la technique de Martin-Löf. Or la dernière de ces équations indique que φ doit être associatif. Ceci nous permet de trouver une solution simple des neuf équations en faisant correspondre à φ la concaténation des chaînes de caractères. Supposons donc $E = F^*$ où F est un certain ensemble de caractères et l'équation 9 est satisfaite en posant

$$\varphi(\alpha,\beta) = \alpha\beta$$

Les équations 5 et 8 donnent l'expression de ψ par récurrence puisqu'elles deviennent

$$\psi(\beta,\alpha\gamma,\delta) = \alpha\psi(\beta,\gamma,\delta)$$
$$\psi(\alpha,\beta,\gamma\delta) = \psi(\alpha,\beta,\gamma)\delta$$

Soit e la chaîne vide de $E = F^*$. On obtient donc

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = \beta\ \psi(\alpha,\ e,\ e)\gamma\ = \beta\ \bar{\alpha}\ \gamma$$

si on pose $\bar{\alpha} = \psi(\alpha,e,e)$. De même, les équations 6 et 7 donnent

$$\chi(\beta,\alpha\gamma,\delta) = \chi(\beta,\gamma,\delta)$$
$$\chi(\alpha,\beta,\gamma\delta) = \chi(\alpha,\beta,\gamma)\delta$$

D'où

$$\chi(\alpha,\beta,\gamma) = \chi(\alpha,e,e)\ \gamma = \underline{\alpha}\gamma$$

si on pose $\underline{\alpha} = \chi(\alpha,e,e)$. Alors les équations 1,2,3 et 4 sont trivialement satisfaites. On retrouve donc à travers les expressions de φ,χ,ψ le λ-calcul étiqueté du chapitre II.

De plus, on montre que si $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$ ne dépend que de α, alors la propriété Church-Rosser subsiste.

APPENDICE 2

HOMOMORPHISMES SUR LE CALCUL ETIQUETE

1) Homomorphisme 1

On retrouve naturellement le λ-calcul de Hyland [19] et Wadsworth [44] par l'homomorphisme h suivant sur les étiquettes de E où E_o est l'ensemble des lettres (voir chapitre II).

$$\begin{cases} h(a) \in \mathbb{N} & \text{si } a \in E_o \\ h(\alpha\beta) = \mathrm{Inf}(h(\alpha), h(\beta)) \\ h(\bar{\alpha}) = h(\underline{\alpha}) = h(\alpha) - 1 \end{cases}$$

et $h(\mathcal{P}(\alpha)) = h(\alpha) \geq 1$. Ce λ-calcul est donc Church-Rosser et a la propriété de normalisation forte, en appliquant nos théorèmes du chapitre II.

2) Homomorphisme 2

On retrouve aussi un λ-calcul de Morris [28] qui lui permet de donner une définition de descendant de sous-expression. On considère l'homomorphisme

$$\begin{array}{ll} h(a) = a & \text{si } a \in E_o \\ h(\alpha\beta) = h(\beta) \\ h(\bar{\alpha}) = h(\underline{\alpha}) = h(\alpha) \end{array}$$

Cet homomorphisme correspond aussi à la méthode de soulignement de Barendregt [1]. Ce calcul est donc Church-Rosser et fortement normalisable, toujours par nos théorèmes de II.

3) <u>Homomorphisme 3</u>

On retrouve aussi le λ-calcul typé usuel. Soit $\mathcal{T} = \{\iota, \iota \to \iota, (\iota \to \iota) \to \iota, \iota \to (\iota \to \iota), \ldots\}$ l'ensemble des types fonctionnels usuels construit sur le type élémentaire ι. On considère l'homomorphisme suivant :

$$\begin{cases} h(a) \in \mathcal{T} & \text{si } a \in E_o \\ h(\alpha\beta) = h(\beta) & \\ h(\bar{\alpha}) = v & \text{si } h(\alpha) = u \to v \\ h(\underline{\alpha}) = u & \text{si } h(\alpha) = u \to v \end{cases}$$

Alors, à nouveau, la hauteur des étiquettes est bornée et on obtient la propriété de normalisation forte en corollaire de notre théorème du chapitre II.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.P. Barendregt, *"Some extensional term models for combinatory logics and λ-calculi"*, PhD Thesis, Utrecht, 1971.

[2] H.P. Barendregt, *"A characterization of terms of the λI-calculus having a normal form"*, JSL 38, 1973, n°3, 441-445.

[3] H.P. Barendregt, *"The type free λ-calculus"*, Utrecht et ETH Zürich, 1975.

[4] H.P. Barendregt, *"Solvability in lambda-calculi"*, Univ. of Utrecht, Dept. of Math. Rapport n°21, Janvier 1976.

[5] H.P. Barendregt, J. Bergstra, J.W. Klop, H. Volken, *"Degrees, reductions and representability in the λ-calculus"*, Univ. of Utrecht, Dept. of Math., Rapport n°22, Février 1976.

[6] G. Berry, *"Calculs ascendants des programmes récursifs"*, Université de Paris VII, thèse de 3° cycle, IRIA-LABORIA, Avril 1976.

[7] G. Berry, *"Calculs optimaux des programmes : interprétations stables et séquentiels"*, thèse à paraître, Université de Paris VII.

[8] G. Berry, J.J. Lévy, *"Minimal and optimal computations of recursive programs"*, 4th ACM-SIGACT-SIPLAN-POPL, Santa Monica, USA, Janvier 1977.

[9] C. Böhm, *"Alcune proprieta della forme βη-normali del λβκ-calcolo"*, CNR n°696, Rome 1968.

[10] J.M. Cadiou, *"Recursive definitions of partial functions and their computation"*, PhD Thesis, Stanford, 1972.

[11] A. Church, *"The calculi of λ-conversion"*, AMS, n°6, Princeton, 1941.

[12] B. Courcelle, *"Sur les ensembles algébriques d'arbres et les languages déterministes ; quelques applications à la théorie des schémas de programmes"*, Thèse, Université de Paris VII, Janvier 1976.

[13] B. Courcelle, M. Nivat, *"Algebraic families of interpretations"*, 17th FOCS, Houston, USA, 1976 (Rapport LABORIA n°189).

[14] H.B. Curry, R. Feys, R.Hindley, J.Seldin, *"Combinatory logic"*, Vol 1 et 2, North-Holland(1958).

[15] D. van Daalen, *"The language theory of Automath"*, PhD Thesis, Eindhoven, 1977.

[16] P.J. Downey, R. Sethi, *"Correct computations rules for recursive languages"*, SIAM Journal, vol 5, n°3, Septembre 1976.

[17] M. Gordon, *"Models of pure LISP"*, PhD Thesis, Edinburgh 1973.

[18] R. Hindley, *"The equivalence of complete reductions"*, Université de Swansea, 1975.

[19] J.M.E. Hyland, *"A survey of some useful partial order relations on terms of the λ-calculus"*, Rome, Mars 1975 Springer Verlag, LNCS n°37.

[20] G. Kahn et G. Plotkin, *"Concrete data types"*, University od Edinburgh, (à paraître).

[21] J.W. Klop, *"On solvability by λI-terms"*, Symposium on λ-calculus and Computer Science theory, Springer Verlag, Mars 1975.

[22] P. Landin, *"A correspondence between ALGOL 60 and Church's lambda notation"*, CACM, Vol 8, n°2 et 3, Février-Mars 1965.

[23] J.J. Lévy, *"Réductions sures dans le λ-calcul"*, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VII, IRIA-LABORIA, Juin 1974.

[24] J.J. Lévy, *"An algebraic interpretation of the λβκ-calculus ; and an application of a labelled λ-calculus"*, Rome, 1975 et TCS, vol 2, n°1, 1976, p.97-114.

[25] R. Milner, *"Implementation and applications of Scott's logic for computable functions"*, ACM-SIGACT Conf. on proving assertions about programs, Las Cruces, USA, Janvier 1972.

[26] R. Milner, *"Fully abstract models of typed λ-calculi"*, TCS (à paraître).

[27] G. Mitschke, *"The standardisation theorem for λ-calculus"*, University of Swansea, 1975.

[28] J.H. Morris, *"Lamda calculus models of programming languages"*, PhD Thesis, MIT, Cambridge, 1968.

[29] M. Nivat, *"On the interpretation of recursive programs schemes"*, Symposia Mathematica, Vol XV, Instituto Nazionale di Alta Matematica, Italy, 1975, p. 225-281.

[30] L. Nolin, Cours de DEA, Université de Paris VII.

[31] M. O'Donnell, *"Reductions strategies in tree replacement systems"*, Cornell, PhD Thesis, Septembre 1976.

[32] G.D. Plotkin, *"A set theoritical definition of application"*, University of Edingurgh, School of A.I., Memo. MIP-R-95, 1972.

[33] G.D. Plotkin, *"The λ-calculus is ω-incomplete"*, JSL, vol. 39, n°2, p.313-317, 1974.

[34] G.D. Plotkin, *"LCF considered as a programming language"*, Proc of Arc et Senans Conference about Proving and Improving programs, Colloques IRIA, Juillet 1975.

[35] G.D. Plotkin, *"Tω as a universal domain"*, Edinburgh, Août 1976.

[36] L.E. Sanchis, *"Functional defined by recursion"*, Notre-Dame Journal of formal logic 8, p. 161-174, 1967.

[37] D. Scott, *"Continuous lattices"*, Oxford, PRG-7, Computing Lab., Août 1971.

[38] D. Scott, *"Data types as lattices"*, SIAM Journal, Vol 5, n°3, Sept. 1976.

[39] D. Scott, C. Strachey, *"Towards a mathematical semantics for computer languages"*, Oxford PRG-6, 1971.

[40] J. Staples, *"Efficient combinatory reduction"*, Queensland Institute of Techn, Math dept.,Brisbane, Australie, 1974.

[41] S. Steinlund, *"Combinators, λ-terms and Proof theory"*, D. Reidel, Dordrecht, 1972.

[42] J. Vuillemin, *"Proof techniques for recursive programs"*, PhD Thesis, Stanford, 1973.

[43] J. Vuillemin, *"Syntaxe, sémantique et axiomatique d'un langage de programmation simple"*, Thèse, Université de Paris VII, Sept. 1974.

[44] C.P. Wadsworth, *"Semantics and pragmatics of the λ-calculus"*, PhD Thesis, Oxford, 1971.

[45] C.P. Wadsworth, *"The relation between computational and denotational properties for Scott's D_∞-models of the λ-calculus"*, SIAM Journal, Vol 5, n°3, Septembre 1976.

[46] C.P. Wadsworth, *"Approximate reduction and λ-calculus models"*, (à paraître dans SIAM).

[47] P.H. Welch, *"A problem of λ-calculus"*, Warwick, Communication personnelle (septembre 1973).

[48] P.H. Welch, *"Continuous semantics and inside-out reductions"*, Symposium on λ-calculus and Computer Science theory, Springer Verlag, LNCS n°37, Mars 1975.

[49] J.C.Raoult, J.Vuillemin, *"Operational and semantic equivalence between recursive programs"*, 1977, (à paraitre).

[50] B.K.Rosen, *"Tree manipulation systems and Church-Rosser theorems"*, JACM Vol 20, n°1, 1973.