INF 421 — 06 Luc Maranget

Deux usages des arbres

Luc.Maranget@inria.fr
http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Luc.Maranget/421/

Deux exemples d'arbres

- Les arbres-termes :

  Le calcul propositionnel.

- Les arbres structurants :

  Diviser le plan en quatre (et puis en quatre, et puis. . .)

Un grand classique

Une expression booléenne e (ou proposition) est :

- Vrai ou faux, T ou F,
- Une variable $x_0, \ldots x_{N-1}$,
- La négation $\neg(e)$,
- Une conjonction $(e_1 \wedge e_2)$, une disjonction $(e_1 \vee e_2)$.

Note :

- Conceptuellement c'est aussi simple que les expressions arithmétiques.
- Techniquement, il y a un peu plus de sortes de termes.

La classe des propositions

Selon le principe d'un champ « nature ».

```
class Prop {
  final static int FALSE=0, TRUE=1, VAR=2, NOT=3, OR=4, AND=5 ;
  int nature ; int asVar ; Prop left, right ;

  private Prop (int nature) { this.nature = nature ; }

  private Prop (int nature, int asVar) {
    this.nature = nature ; this.asVar = asVar ;
  }

  private Prop (int nature, Prop left) {
    this.nature = nature ; this.left = left ;
  }

  private Prop (int nature, Prop left, Prop right) {
    this.nature = nature ; this.left = left ; this.right = right ;
  }}
```

Construction des termes

Il devient hasardeux de se fier aux constructeurs. Des détails, liés à la réalisation concrète prennent trop d'importance.

On utilisera plutôt des méthodes statiques bien nommées.

```
static Prop mkTrue() { return new Prop(TRUE) ; }

static Prop mkVar(int no) { return new Prop(VAR, no) ; }

static Prop mkNot(Prop e) { return new Prop(NOT, e) ; }

static Prop mkAnd(Prop e1, Prop e2) {
  return new Prop(AND, e1, e2) ;
}
...
```

C'est la technique dite *factory*.

Bonus

Une certaine déconnexion entre

- Spécification, (ce que c'est, ici une proposition)
- Implémentation (comment c'est fait, ici le champ `nature` etc.)

On peut d'alleurs exprimer d'autres connecteurs logiques, sans changer les cellules d'arbre, par ex.

```
static Prop mkImplies (Prop e1, Prop e2) {
  return mkOr(mkNot(e1), e2) ;
}
```


Affichage

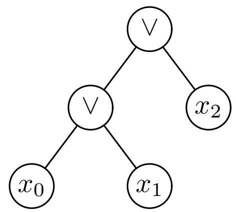
Comme d'habitude, redéfinir `toString`.

```
public String toString() {
  switch (nature) {
  case TRUE: return "true" ;
  case FALSE: return "false" ;
  case VAR: return "x" + asVar ;
  case NOT: return  "!(" + left + ")" ;
  case OR: return  "(" + left + " || " + right + ")" ;
  case AND: return  "(" + left + " && " + right + ")" ;
  default: throw new Error("Prop (toString)") ;
  }
}
```

Bénéfice : `System.out.println(e)` fonctionne.

Parcours ? Infixe en quelque sorte.

Fonctionnement



- `toString()` du sous-arbre de gauche :
  - Deux feuilles `"x0"` et `"x1"`.
  - Concaténation : `"(" + "x0" + " || " + "x1" + ")"`.

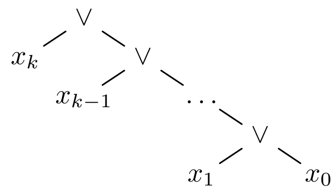
  Soit au final pour ce sous-arbre `"(x0 || x1)"`.
- `toString()` du sous-arbre de droite : `"x2"`.
- Et finalement : `"(" + "(x0 || x1)" + " || " + "x2" + ")"`

Coût de `toString()`

Considérer la suite d'expressions

$$E_0 = x_0, \qquad E_{k+1} = x_{k+1} \vee E_k$$

- L'arbre E_k ressemble plutôt à une liste.



- L'arbre E_k possède $2k + 1$ nœuds.
- E_k`.toString()` est quadratique, les contaténations produisent des chaînes de taille au moins $3 + 5 + \cdots + (2k + 1)$.

toString « linéaire »

Avec le `StringBuilder` et sa méthode `append(String s)`, qui ajoute la chaîne s à la fin du `StringBuilder`, pour un coût proportionnel à s`.length()`.

```
private void inStringBuilder(StringBuilder r) {
   switch (nature) {
   case TRUE:
     r.append("true") ; break ;
   case FALSE:
     r.append("false") ; break ;
   case VAR:
     r.append("x" + asVar) ; break ;
   case NOT:
     r.append("!(") ;
     left.inStringBuilder(r) ;
     r.append(")") ;
     break ;
 ...
```


toString « linéaire » II

```
     ...
     case AND:
       r.append("(") ;
       left.inStringBuilder(r) ;
       r.append(" && ") ;
       right.inStringBuilder(r) ;
       r.append(")") ;
       break ;
     }
   }

   public String toString() {
     StringBuilder r = new StringBuilder () ;
     inStringBuilder(r) ;
     return r.toString() ;
   }
}
```


Évaluation des propositions

Les règles sont normalement bien connues :

e	$\neg(e)$
F	T
T	F

e_1	e_2	$(e_1 \vee e_2)$	$(e_1 \wedge e_2)$
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	T	T

L'évaluation se fait respectivement à un environnement (une table d'associations : $x_i \mapsto b$).

Les associations ont été vues lors de l'amphi 04. Ici on peut utiliser un tableau directement (variables indicées).

```
static boolean eval(Prop e, boolean [] env) { ... }
```

Évaluation

```
static boolean eval(Prop e, boolean [] env) {
  switch (e.nature) {
  case TRUE: return true ;
  case FALSE: return false ;
  case VAR: return env[e.asVar] ;
  case NOT: return !eval(e.left, env) ;
  case OR:
    return eval(e.left, env) ||  eval(e.right, env) ;
  case AND:
    return eval(e.left, env) &&  eval(e.right, env) ;
  default:
    throw new Error("Prop (eval)") ;
  }
}
```


Un codage dynamique est également possible

```
boolean eval(boolean [] env) {
  switch (nature) {
  case TRUE: return true ;
  case FALSE: return false ;
  case VAR: return env[asVar] ;
  case NOT: return ! left.eval(env) ;
  case OR:
    return left.eval(env) ||  right.eval(env) ;
  case AND:
    return left.eval(env) &&  right.eval(env) ;
  default:
    throw new Error("Prop (eval)") ;
  }
}
```

Statique ou dynamique ? Ici c'est une question de goût, pour la suite, je choisis statique.

Application du calcul des propositions

La direction d'une crèche souhaite réglementer les jouets apportés par les enfants.

Les jouets sont décrits selon cinq critères : petit/grand, vert/pas vert, peluche/pas peluche, électrique/pas électrique, avec piles/sans piles.

C'est à dire, nous avons cinq variables booléennes.

```
Prop petit = mkVar(0) ;
Prop vert = mkVar(1) ;
...
Prop piles = mkVar(4) ;
```


Les règles de la crèche

- Les jouets doivent être de petite taille, sauf les peluches.

  `Prop r1 = mkOr(petit, peluche) ;`

- Un jouet est soit, vert, soit grand, soit les deux.

  `Prop r2 = mkOr(vert, mkNot(petit)) ;`

- Les jouets électriques sont accompagnés de leurs piles,

  `Prop r3 = mkImplies(electrique, piles) ;`

- Il est interdit d'apporter des piles et une peluche.

  `Prop r4 = mkNot(mkAnd(piles, peluche)) ;`

- Touts les jouets verts sont des peluches.

  `Prop r5 = mkImplies(vert, peluche) ;`

Les règles de la crèche II

Les règles de la crèche sont la conjonction des cinq règles élémentaires.

```
Prop rs = mkAnd(r1, mkAnd(r2, mkAnd(r3, mkAnd(r4, r5)))) ;
```

Le contrôle à l'entrée

Oscar arrive avec son (grand) train électrique rouge et ses piles, peut-il-rentrer ?

- Le jouet n'est pas petit, n'est pas vert, n'est pas une peluche, est électrique, et il y a des piles :

```
boolean [] oscar = { false, false, false, true, true } ;
```

- On vérifie facilement que le train d'Oscar est interdit (à cause de la première règle). La machine le vérifiera encore plus facilement.

```
boolean okOscar = eval(rs, oscar) ;
```


Une question bien légitime

- Y-a-t-il des jouets autorisés ?
- Existe-t-il un environnement `env` (un « jouet ») tel que : `eval(rs, env)` renvoie **true** ?

Cette tâche se décompose clairement en deux :

1. Pour chaque jouet possible,. . .
2. évaluer les règles.

Détour : tous les environnements possibles

Afficher un environnement (« jouet ») donné, facile :

```
static void println(boolean [] env) {
  for (int i = 0 ; i < env.length ; i++) {
    System.out.print(env[i] ? 'T' : 'F') ;
    // NB: expression conditionnelle « e1 ? e2 : e3 »
  }
  System.out.println() ;
}
```

Ensuite les afficher tous, donc écrire une méthode

```
static void printAll(int n) { ... }
```

qui affiche les 2^n environnements possibles.

Pourquoi 2^n ?

Voici une représentation imagée de la récurrence pratiquée.

$$P_{n+1} = \begin{array}{c|c} T & \\ T & P_n \\ \vdots & \\ T & \\ \hline F & \\ F & P_n \\ \vdots & \\ F & \end{array}$$

Soit : Si on sait énumérer tous les environnemnts à n variables, alors on sait énumérer tous les environnemnts à $n+1$ variables.

D'énumérer à afficher

Nous pourrions construire une grosse matrice P_n.

```
static boolean [] [] allEnv(int n) {
   boolean [] [] r =
     new boolean [1 << n][n] ; // Decalage à gauche ~ ×2^n.
   if (n == 0) {
     return r ; // En effet : { {} } (une ligne vide)
   } else {
     boolean [] [] t = allEnv(n-1) ;
     int kmax = t.length ;
     for (int k = 0 ; k < kmax ; k++) {
        r[k][0] = true ; r[k+kmax][0] = false ;
        for (int i = 0 ; i < n-1 ; i++)
          r[k][i+1] = r[k+kmax][i+1] = t[k][i] ;
     }
     return r ;
   }}
```

Puis l'afficher ligne par ligne, mais... gaspillage de mémoire.

La bonne idée

Pas besoin de construire tous les environnements possibles, juste pour les afficher.

```
static void printAll(int n) { printAll(0, new boolean [n]) ; }

static void printAll(int v, boolean [] env) {
  if (v >= env.length) {
    println(env) ;
  } else {
     env[v] = true ;  printAll(v+1, env) ;
     env[v] = false ; printAll(v+1, env) ;
  }
}
```

Note : Mission de `printAll(v, env)` : afficher tous les environnements (de taille $n =$ `env.length`) qui commencent par $b_0 b_1 \ldots b_{v-1}$ donnés.

Afficher tous les jouets autorisés

Comme l'affichage de tous les environements, avec une vérification supplémentaire.

```
static void printAllowed(Prop rs, int v, boolean [] env) {
  if (v >= env.length) {
     if (eval(rs, env)) println(env) ;
  } else {
     env[v] = true ;  printAllowed(rs, v+1, env) ;
     env[v] = false ; printAllowed(rs, v+1, env) ;
  }
}

static void printAllowed(Prop rs, int n) {
   printAllowed(rs, 0, new boolean [n]) ;
}
```

Accessoirement Sont autorisés : `TTTFF FTTFF FFTFF`, par ex. grand, vert, peluche, pas électrique et sans piles.

Existe-t-il au moins un jouet autorisé ?

Pour tous les environnements, on évalue `rs`, jusqu'à trouver **true**.

```
static boolean satisfiable(Prop rs, int v, boolean [] env) {
  if (v >= env.length) {
     return eval(rs, env) ;
  } else {
     env[v] = true ;
     if (satisfiable(rs, v+1, env)) return true ;
     env[v] = false ;
     return satisfiable(rs, v+1, env) ;
  }
}
```

Remarquer Le parcours interrompu par une évaluation positive.

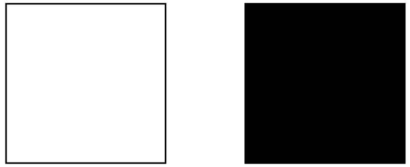
Culture

- Le problème de la satisfiabilité (des expressions booléennes) est le prototype d'une classe de problèmes difficiles à résoudre en pratique.
- C'est un problème qui se rencontre souvent :
  - Après codage, d'un autre problème (ex. répartir n reines sur un échiquier, etc.)
  - Dans la conception de circuit intégrés deux circuits (fct. booléennes) equivalents ?
- Il existe des techniques « efficaces », mais toutes sont en $O(2^n)$.

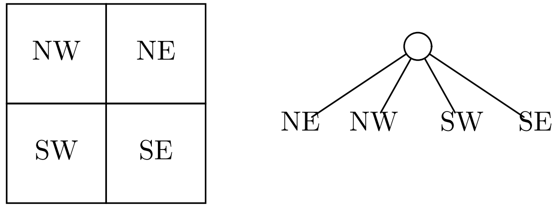
Un usage géométrique des arbres

Une vision hiérarchique des images (carrées). Une image est :

- Soit toute blanche ou toute noire (de couleur uniforme).

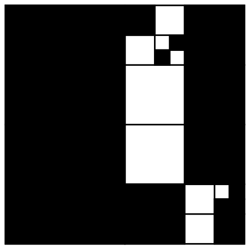


- Soit formée de quatre images.

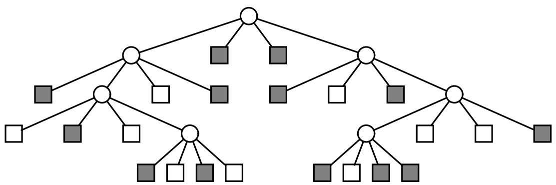


Exemple

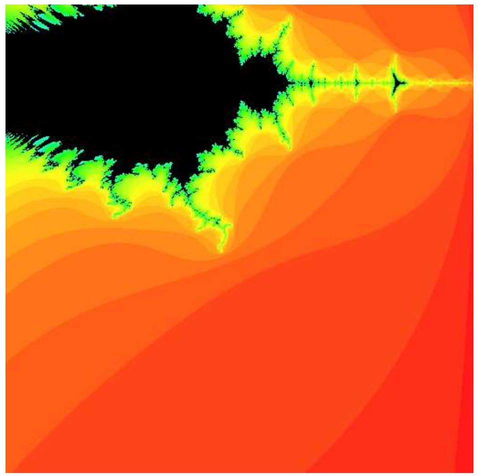
- Une image 16×16.



- Son quadtree

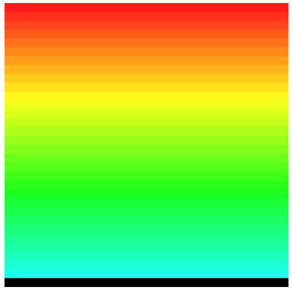


Exemple en couleurs, une image



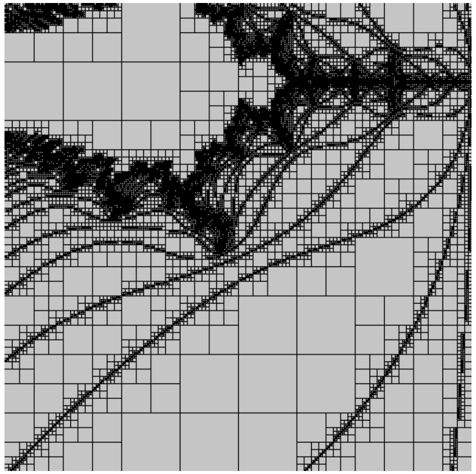
Une échelle de couleurs

Notre image contient peu de couleurs, chaque couleur est en fait une valeur (ici de 0 à 31).

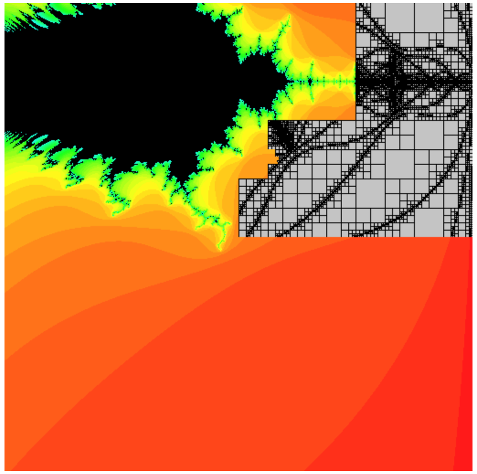


On rencontre souvent ce style d'images qui rendent compte de phénomènes physiques ou mathématiques.

Exemple en couleurs, le quadtree



Exemple en couleurs, un peu des deux



Type des quadtrees

```
class Quad {
  int nature ;
  final static int LEAF=0, NODE=1 ;

  int color ; // Les feuilles
  Quad (int color) {
    this.nature = LEAF ; this.color = color ;
  }

  Quad sw, nw, ne, se ; // Les noeuds internes
  Quad(Quad sw, Quad nw, Quad ne, Quad se) {
    this.nature = NODE ;
    this.sw = sw ; this.nw = nw ;
    this.ne = ne ; this.se = se ;
  }
}
```

Implicitement Un `Quad` est une image (carrée).

Deux représentations possibles de nos images

Rappelons que ici une couleur est un entier entre 0 et 31.

- Une matrice `SIZE` × `SIZE` de couleurs.

```
int [] [] img = new int[SIZE][SIZE] ;
```

- Ou un objet de la classe `Quad`.

Ces deux structures de données sont deux réalisations machine de la même chose (l'image).

Remarque importante

- Tout le quadtree représente une image carrée (coté `SIZE`).
- Si `q` représente le carré de côté t et de coordonnées (i, j), ...
- Alors, `q.nw` (par ex) est l'image de côté $t/2$ et de coordonnées $(i, j + t/2)$.

Exemple d'opération : trouver la couleur

- La matrice :

```
static int getColor(int [] [] img int i, int j) {
  return img[i][j] ;
}
```

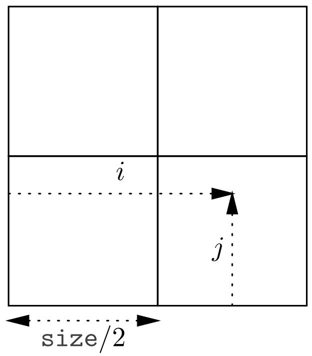
- Le quadtree :

```
static int getColor(Quad q, int i, int j) {
  return getColor(q, SIZE, i, j) ;
}
```

  - Si le quadtree est une feuille, c'est la couleur de la feuille.
  - Sinon recherche la couleur dans le bon quadrant.

Trouver le bon quadrant

- Les coordonnées i et j sont relatives au point origine d'un carré de côté `size`.



- Ici, le point défini par (i, j) devient le point défni par $(i-\mathtt{size}/2, j)$ dans le quadrant sud-est.

Trouver la couleur d'un point dans le quadtree

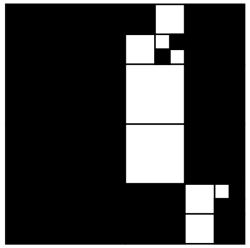
```
static int getColor(Quad q, int size, int i, int j) {
  if (q.nature == LEAF) {
    return q.color ;
  } else {
     int t = size/2 ;
     if (i < t) { // A l'ouest.
       if (j < t)
          return getColor(q.sw, t, i, j) ;
        else
          return getColor(q.nw, t, i, j-t) ;
     } else { // A l'est.
       if (j < t)
          return getColor(q.se, t, i-t, j) ;
        else
          return getColor(q.ne, t, i-t, j-t) ;
     }
  }
}
```

Code itératif

```
static int getColor(Quad q, int size, int i, int j) {
  while (q.nature == NODE) {
     size /= 2 ; // pour size = size / 2 ;
     if (i < size) { // A l'ouest.
       if (j < size) {
          q = q.nw ;
        } else {
          q = q.sw ; j -= size ;
        }
     } else { // A l'est.
       i -= size ;
       if (j < size) {
         q = q.ne ;
       } else {
         q = q.se ; j -= size ;
       }
    }
  }
  return q.color ;
}
```


Intérêt du quadtree

- Une méthode simple de compression d'une image. Plaçons nous en noir et blanc.
  - ▷ Une image 16×16.



```
1111111111001111
1111111111001111
1111111100011111
1111111100101111
1111111100001111
1111111100001111
1111111100001111
1111111100001111
1111111100001111
1111111100001111
1111111100001111
1111111100001111
1111111111110001
1111111111110011
1111111111110011
1111111111110011
```

(Soit 256 bits.)

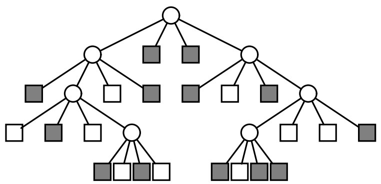
▷ Traduction du quadtree (parcours préfixe) :

★ Une feuille blanche : 00

★ Une feuille noire : 01

★ Un nœud NE,NW,SW,SE : $1\underline{\text{NE}}\,\underline{\text{NW}}\,\underline{\text{SW}}\,\underline{\text{SE}}$

▷ Par exemple :



$1\underline{T_1}\,\underline{T_2}\,\underline{T_3}\,\underline{T_4}$

$1\underline{T_1}0101\underline{T_4}$

...

1101100010010

1000100000101

0110100011101

000101000001

Au final, 51 bits.

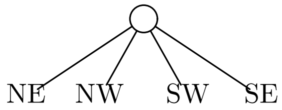
Autre intérêt

Certaines opérations sont plus faciles/naturelles/voire efficaces que sur les tableaux de couleurs.

- Les rotations,
- Les changements de couleurs.

Exemple : la rotation

NW	NE
SW	SE



La rotation positive d'un quart de tour :

$$\text{NE} \rightarrow \text{NW} \rightarrow \text{SW} \rightarrow \text{SE} \rightarrow \text{NE}$$

C'est à dire NE (tourné d'un quart de tour) devient NW, etc.

Programmation de la rotation

```
static Quad rot(Quad q) {
  if (q.nature == LEAF) {
    return q ;
  } else {
    Quad sw = rot(q.sw) ;
    Quad nw = rot(q.nw) ;
    Quad ne = rot(q.ne) ;
    Quad se = rot(q.se) ;
    return new Quad (nw, ne, se, sw) ;
  }
}
```


Autre intérêt

L'affichage : si afficher un carré de couleur ne dépend pas de la taille du carré.

Hypothèse réaliste

- Un dessin demande une communication sur le réseau (coût d'une communication peu dépendant de la taille).
- On souhaite rafraîchir l'écran à chaque changement (coût du rafraîchissement bien plus important que le dessin lui même).

Dès lors le quadtree est intéressant, car il minimise les opérations de dessin.

Dessin traditionnel

```
static void draw(int [] [] img) {
  for (int i = 0 ; i < SIZE ; i++) {
    for (int j = 0 ; j < SIZE ; j++) {
      fillSquare(i,j,1,img[i][j]) ;
      // Remplir un carré avec une couleur
      // arguments (i, j, t, c)
      //   * (i,j) -> position coin en bas à gauche
      //   * t -> côté du carré
      //   * c -> couleur
    }
  }
}
```

Dessin du Quadtree

On considère qu'un quatree représente un carré, de coordonnées (i, j) et de taille sz.

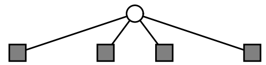
```
static void draw(Quad q) { draw(q, 0, 0, SIZE) ; }

static void draw(Quad q, int i, int j, int sz) {
    if (q.nature == LEAF) {
      fillSquare(i, j, sz, q.color) ;
    } else {
      int nsz = sz/2 ;
      draw(q.sw, i, j, nsz) ;
      draw(q.nw, i, j+nsz, nsz) ;
      draw(q.ne, i+nsz, j+nsz, nsz) ;
      draw(q.se, i+nsz, j, nsz) ;
    }
  }
```


Fabrication du quadtree

Astuce : éviter les divisions inutiles.

- Éviter :



- Préférer :

```
static boolean monochrome(Quad q1, Quad q2, Quad q3, Quad q4) {
 return
   (q1.nature == LEAF && q2.nature == LEAF &&
    q3.nature == LEAF && q4.nature == LEAF) &&
   (q1.color == q2.color && q2.color == q3.color &&
    q3.color == q4.color) ;
 }
```


Fabrication du quadtree

À partir de l'image « standard » **int** `[] [] t`, supposée carrée et de taille 2^n.

C'est en quelque sorte l'opération inverse du dessin.

```
static Quad toQuad(int [] [] t) {
  return toQuad(t, 0, 0, t.length) ;
}
```

- **Au dessus :** produire le quadtree qui représente l'image donnée par le sous-tableau (carré) de `t`, positionné en $(0, 0)$ et de taille `t.length`.
- **En géneral :** on doit produire le quadtree qui représente l'image donnée par le sous-tableau (carré) de `t`, positionné en (i, j) et de taille `sz`.

Programmation

Traduire la sous-image $\langle i, j, \mathtt{sz}\rangle$ en quadtree.

```
static Quad toQuad(int [] [] t, int i, int j, int sz) {
  if (sz == 1) {
    return new Quad(t[i][j]) ;
  } else {
    int nsz = sz/2 ;
    Quad sw = toQuad(t, i, j, nsz) ;
    Quad nw = toQuad(t, i, j+nsz, nsz) ;
    Quad ne = toQuad(t, i+nsz, j+nsz, nsz) ;
    Quad se = toQuad(t, i+nsz, j, nsz) ;
    if (monochrome(sw, nw, ne, se)) {
      return sw ;
    } else {
      return new Quad (sw, nw, ne, se) ;
    }
  }
}
```