INF 544 Luc Maranget

Programmation impérative

Luc.Maranget@inria.fr

http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Luc.Maranget/TLP/

A Des nombres qui changent.

B Formalisation des construction impératives.

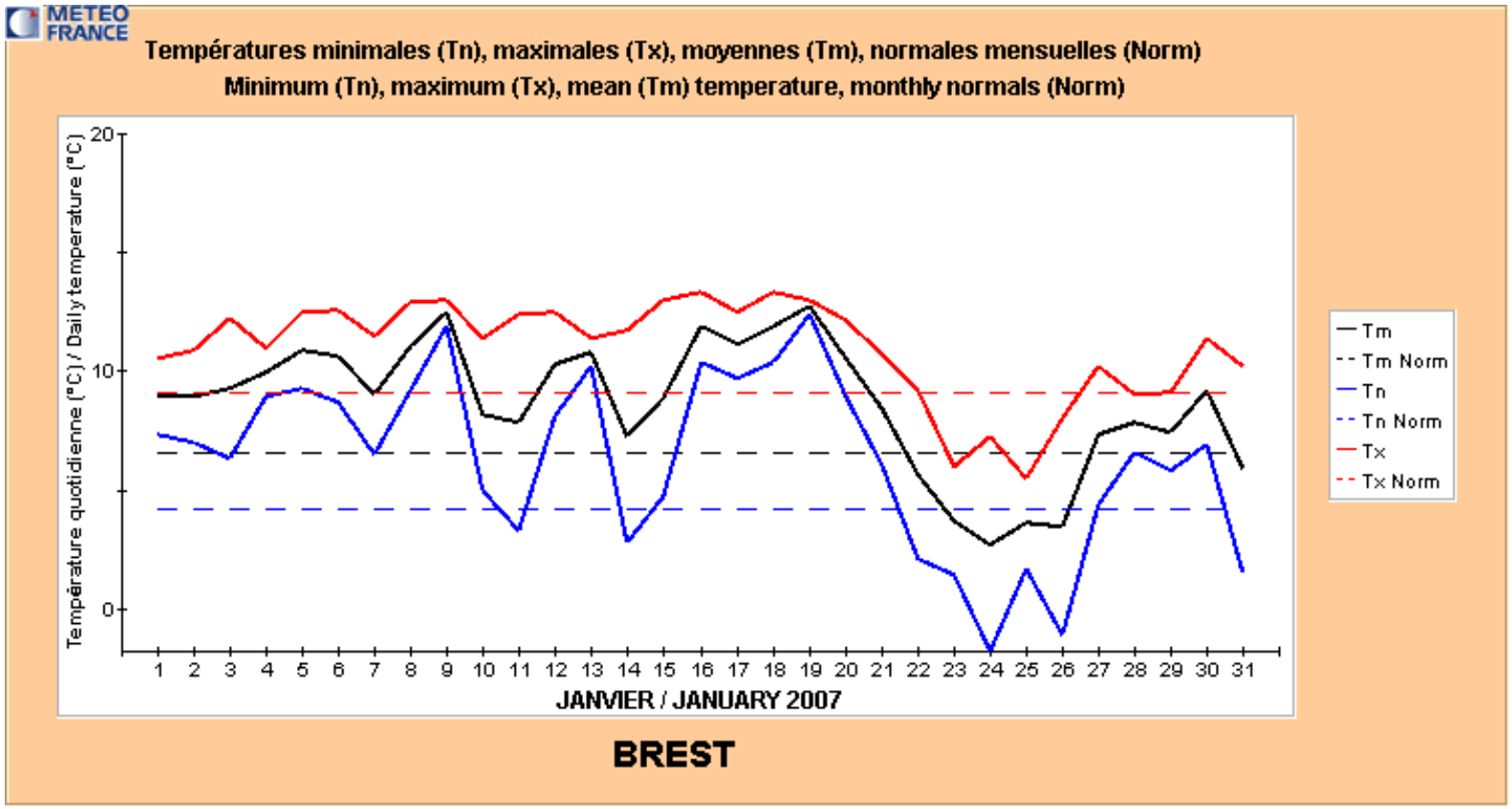
C Quelques trucs.

Des nombres qui changent

- La capacité d'une salle de concert, vs. le nombre de places restantes.
- La température de fusion de la glace, vs. la température à Palaiseau.
- Une variable de PCF, vs. une variable de Java.

Une fonction du temps

La température à Palaiseau (ou à Brest) est une fonction du temps.



Mais vu de Palaiseau (ou de Brest) on se contente de mesurer (ressentir) la température.

Le nombre de places disponibles

Change avec le temps.

Veut-on/Peut-on-le modéliser comme une fct `places:Nat -> Nat` ?

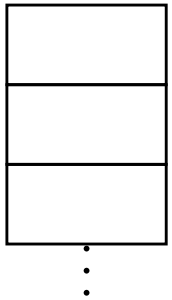
Si oui qqs questions.

- Quelle heure est-il ?
- A-t-on réellement besoin de `places(t-10)` ?
- Peut-on connaître `places(t+10)` ?

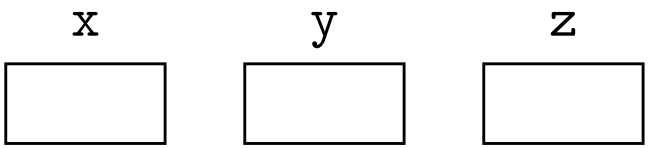
En fait l'ordinateur possède une mémoire à l'état changeant, analogue d'un système physique qui ressent la température à Palaiseau.

La référence, une adresse en mémoire civilisée

La mémoire est un grand tableau de cases.



On donne des noms aux cases (cellules).



Let `x` **= Ref** ... **In** ...

La valeur exacte des adresses est sans importance.

Ce sont des *références*, des constantes r_1, r_2 etc.

Opérations sur les références

- Création

  Let `x` **= Ref** `1`

  Création d'une nouvelle case. **Noter :** valeur initiale obligatoire (typage, contrôle de la programmation).

- Regarder dans la case (valeur actuelle).

  `!x`

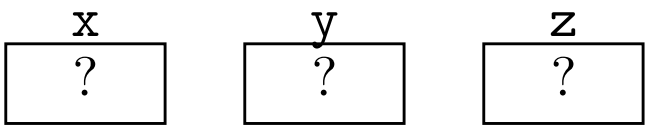
- Changer le contenu de la case (contribution à la construction de la fonction du temps).

  `x := 2`

Dans un langage impératif

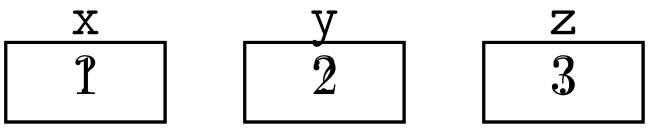
Une variable est toujours une référence, pour créer, suffit de déclarer.

```
int x, y, z ;
```



Changer le contenu d'une case, c'est contribuer à la construction de la fonction du temps.

```
x = 1 ; y = 2 ; z = 3 ;
```



Dans un langage impératif

Toutes les variables sont des références.

```
y = x + 1 ; // Affecter y, lire x
```

À gauche de "=", une variable $\sim$ une case à affecter, vs. à droite de "=", une case à lire.

En PCF

Les opérations « affecter » et « lire » sont plus explicites.

t_1 `:=` `!`t_2 `+ 1`

Le terme t_1 s'évalue en une référence, le terme t_2 s'évalue en une référence. Évidemment, t_1 et t_2 peuvent être des variables.

```
y := !x + 1
```

Dans ce cas, l'environnement doit contenir des liaisons de `x` et `y` à des références.

Le monde

Un modèle de la mémoire, ou de fonctions du temps vu de l'intérieur du système.

Un ensemble de paires (r, v), tel que $(r, v) \in m$ et $(r, v') \in m$ entraîne $v = v'$ — *r référence*, peu importe ce que c'est précisément.

L'évaluation est donnée par une relation à cinq places.

$$E, m \vdash t \hookrightarrow v, m'$$

L'évaluation du terme t dans l'env. E et le monde m produit la valeur v et change le monde en m'.

- E donne la valeur des variables libres de t.
- Le monde m donne les valeurs associées aux références.

Le changement de m en m' vient en plus de la valeur v : rend compte des « effets de bord » (cf. « side effect *»).*

Syntaxe étendue

Cinq nouvelles constructions.

```
type t =
| Num of int | Var of string  | Op of op * t * t
| App of t * t | Let of t * string * t
| Fun of string * t | Fix of string * t
(* Syntaxe de PCF usuel *)
| Ref of t (* Nouvelle référence, Ref t *)
| Get of t (* Lecture, !t *)
| Set of t * t (* Affectation, t1 := t2 *)
| Void (* Une nouvelle constante, notée () *)
| Seq of t * t (* Séquence t1 ; t2 *)
```

Valeurs étendues

Aux valeurs de PCF usuel (en appel par valeur), entiers n et fermetures $\langle x \bullet t \bullet E \rangle$, on ajoute.

- Des références notées r_1, r_2 etc, qui donnent accès aux paires du monde.
- void, noté encore ().

```
type env = (string * value) list
and value =
| Num_v of int | Clo_v of string * Ast.t * env
(* Valeurs de PCF usuel *)
| Void_v
| Ref_v of value World.ref
```

Le module World

Pour le moment, le monde est une valeur (Caml) de type **World.t**

```
type 'a t (* Le type du monde *)
val create : unit -> 'a t (* Nouveau monde *)

type 'a ref (* Le type des références *)

(* Création d'une nouvelle case, renvoie une ref vers icelle *)
val alloc : 'a t -> 'a -> 'a ref * 'a t
(* Affectation *)
val set : 'a t -> 'a ref -> 'a -> 'a t
(* Lecture *)
val get : 'a t -> 'a ref -> 'a
```

Règles des constructions impératives

Séquence

La constante “void” () et la séquence t_1 ; t_2.

$$E, m \vdash \texttt{()} \hookrightarrow (), m \qquad \frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow v_1, m_1 \qquad E, m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow v_2, m_2}{E, m \vdash (t_1 \texttt{ ; } t_2) \hookrightarrow v_2, m_2}$$

L’enchaînement en séquence de t_1 puis t_2 est exprimé par la production puis l’usage de m_1 (une espèce de relation de Chasles). Comparer avec :

$$\frac{E \vdash t_1 \hookrightarrow v_1 \qquad E \vdash t_2 \hookrightarrow v_2}{E \vdash (t_1 \texttt{ ; } t_2) \hookrightarrow v_2}$$

Variante de la séquence

Si on souhaite ne pas oublier des valeurs v_1 potentiellement significatives.

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow (), m_1 \qquad E, m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow v_2, m_2}{E, m \vdash (t_1 \ ; t_2) \hookrightarrow v_2, m_2}$$

Ainsi, on exige que t_1 s'évalue en "void".

Dans ce cas `(1 ; 2)` est une erreur de type choisie.

Le contrôle statique des types reste possible ("void" seule valeur du type `unit`).

Références

Créer une reférence, lire une référence, affecter une référence.

$$\frac{E, m \vdash t \hookrightarrow v, m'}{E, m \vdash (\mathbf{Ref}\ t) \hookrightarrow r, (m' \uplus (r, v))}$$

$$\frac{E, m \vdash t \hookrightarrow r, m' \qquad (r, v) \in m'}{E, m \vdash\ !t \hookrightarrow v, m'}$$

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow r, m' \uplus (r, \_) \qquad E, m' \uplus (r, \_) \vdash t_2 \hookrightarrow v, m'' \uplus (r, \_)}{E, m \vdash t_1 := t_2 \hookrightarrow (), m'' \uplus (r, v)}$$

Note : dans la première règle, r est nouveau, (exprimé par $\uplus$ + pas de paires avec la même référence), et on exige une valeur initiale.

Affectation

La règle est particulièrement précise.

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow r, m' \uplus (r, \_) \qquad E, m' \uplus (r, \_) \vdash t_2 \hookrightarrow v, m'' \uplus (r, \_)}{E, m \vdash t_1 \texttt{:=} t_2 \hookrightarrow \texttt{()}, m'' \uplus (r, v)}$$

- t_1 est évalué avant t_2.
- L'affectation change le dernier monde $m'' \uplus (r, \_)$.

Ainsi, nous connaissons la sémantique de par ex.

```
Let x = Ref 0 In Let y = Ref 1 In
(Ifz !x Then x Else y) := !x + 1
```

Le monde final est $\{ (r_x, 1), (r_y, 1) \}$

Variante de l'affectation

Pratiquée par Java (et C).

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow r, m' \uplus (r, \_) \qquad E, m' \uplus (r, \_) \vdash t_2 \hookrightarrow v, m'' \uplus (r, \_)}{E, m \vdash t_1 := t_2 \hookrightarrow v, m'' \uplus (r, v)}$$

Permet ce genre de truc :

```
x = (y = 1) ;
```

À comprendre avec des parenthèses.

Encore une variation

En C, il est possible de récupérer la référence associée à une case Avec l'opérateur « `&` ».

On peut se hasarder à lui donner une sémantique (au moins dans le cas où on l'applique à une variable.

$$\frac{E(x) = r}{E, m \vdash \&x \hookrightarrow r, m}$$

Le type d'une référence est « pointeur vers le type du contenu de la case », noté $t*$.

```
int x = 1 ;
int * p = &x ; /* p est une référence vers la case de nom x */
*p = 2 ;       /* !p := 2, en quelque sorte */
```

Le reste des règles

Extension des règles de l'amphi 03. Transporter le monde.

$$E, m \vdash \texttt{n} \hookrightarrow n, m \qquad E, m \vdash (\textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t) \hookrightarrow \langle x \bullet t \bullet E \rangle, m$$

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow n_1, m_1 \qquad E, m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow n_2, m_2}{E, m \vdash (t_1\ \ \texttt{op}\ \ t_2) \hookrightarrow (n_1\ op\ n_2), m_2}$$

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow \langle x \bullet t \bullet E_1 \rangle, m_1 \qquad E, m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow v_2, m_2 \qquad E_1 \oplus [x = v_2], m_2 \vdash t \hookrightarrow v, m_3}{E, m \vdash (t_1\ t_2) \hookrightarrow v, m_3}$$

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow v_1, m_1 \qquad E \oplus [x = v_1], m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow v_2, m_2}{E, m \vdash (\textbf{Let}\ x\ \texttt{=}\ t_1\ \textbf{In}\ t_2) \hookrightarrow v_2, m_2}$$

$$E, m \vdash (\textbf{Fix}\ f\ \texttt{->}\ \textbf{Fun}\ x\ \texttt{->}\ t) \hookrightarrow (C = \langle x \bullet t \bullet E \oplus [f = C] \rangle), m$$

Variante sans la séquence

La séquence t_1 ; t_2 est exprimable comme **Let** x = t_1 **In** t_2, où $x \notin \mathcal{F}(t_2)$.

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow v_1, m_1 \qquad E \oplus [x = v_1], m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow v_2, m_2}{E, m \vdash (\textbf{Let } x \texttt{ = } t_1 \textbf{ In } t_2) \hookrightarrow v_2, m_2}$$

Car la liaison impose d'évaluer t_1 avant t_2.

Une construction spécifique de la séquence reste plus parlante.

En Caml, on peut écrire.

let _ = t_1 **in** t_2 *(* Variante qui oublie v_2 *)*

let () = t_1 **in** t_2 *(* Variante qui force v_1 vaut void *)*

(NB. Dans les deux cas l'environnement d'évaluation de t_2 n'est pas étendu.)

Quelques trucs

- Implémentation du monde, en Caml et en PCF.
- Coder le **Fix**
- Constructions impératives et appel par nom.

Impact du transport du monde

Avant.

$$\frac{E \vdash t_1 \hookrightarrow n_1 \qquad E \vdash t_2 \hookrightarrow n_2}{E \vdash (t_1 \ \texttt{op} \ t_2) \hookrightarrow (n_1 \, op \, n_2)}$$

Maintenant.

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow n_1, m_1 \qquad E, m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow n_2, m_2}{E, m \vdash (t_1 \ \texttt{op} \ t_2) \hookrightarrow (n_1 \, op \, n_2), m_2}$$

L'usage du monde impose de spécifier l'ordre d'évaluation, ici c'est de gauche à droite. On aurait pu choisir l'autre sens, mais on doit choisir.

Et de même pour l'application etc.

Implémentation du monde

Voici une réalisation où le monde est une liste de valeurs.

```
exception Error of string
type 'a t = 'a list
type 'a ref = int (* Référence = indice  dans la liste *)

let alloc w v0 = w@[v0], List.length w

let get w i =
  try List.nth w i
  with Failure _ -> raise (Error "Get")

let rec set w i vi = match i,w with
| 0,_::w -> vi::w
| _,v::w -> v::set w (i-1) w
| _,_ -> raise (Error "Set")
```

Un bout d'interpréteur

Une règle :

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow v_1, m_1 \qquad E, m_1 \vdash t_2 \hookrightarrow v_2, m_2}{E, m \vdash (t_1 \,;\, t_2) \hookrightarrow v_2, m_2}$$

```
let rec inter e m t = match t with
...
| Seq (t1,t2) ->
    let _,m1 = inter e m t1 in
    let v2,m2 = inter e m1 t2 in
    v2,m2
| Op (Add,t1,t2) ->
    let n1,m1 = inter_int e m t1 in
    let n2,m2 = inter_int e m1 t2 in
    Num_v (n1+n2),m2
...
```

Usage du monde

L'usage du monde suit une « relation de Chasles ». Le paramètre monde suit exactement le temps.

```
let rec inter e m t = match t with
...
| Seq (t1,t2) ->
   let _,m = inter e m t1 in
   let v2,m = inter e m t2 in
   v2,m
| Op (Add,t1,t2) ->
   let n1,m = inter_int e m t1 in
   let n2,m = inter_int e m t2 in
   Num_v (n1+n2),m
...
```

Caml est impératif

On peut implémenter les références de PCF par celles de Caml.

```
type value = ... | Ref_v of value ref

let rec inter e t = match t with
...
| Seq (t1,t2) ->
    let _ = inter e t1 in (* Respecter l'ordre *)
    let v2 = inter e t2 in
    v2
| Op (Add,t1,t2) ->
    let n1 = inter_int e t1 in
    let n2 = inter_int e t2 in
    Num_v (n1+n2)
...
```

Mais un monde explicite reste indispensable pour implémenter PCF impératif dans PCF.

Liaison dynamique

Le monde donne accès à des valeurs « à un instant donné »

```
Let x = Ref 0 In
Let addx = Fun y -> !x + y In
x := 3 ; addx 1
```

Le résultat est 4.

C'est à dire que « `!x` » est calculé dans un monde $(r_x, 3)$ (*i.e.* valeur à l'appel et pas lors de la définition de `addx`.)

La liaison « *dynamique* » est une généralisation excessive de ce comportement : l'environnement est traité comme un monde.

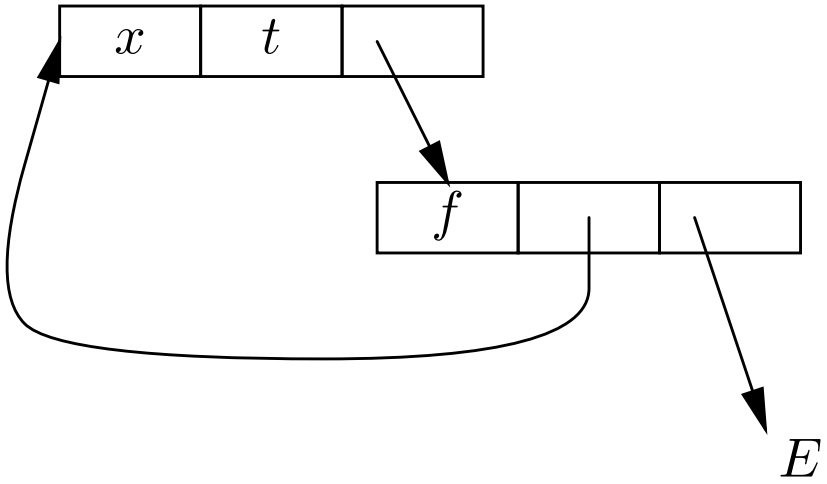
```
Let x = 0 In (* Env: (x,1) *)
Let addx = Fun y -> x + y In
Let x = 3 In  (* Env: (x,3) *)
addx 1        (* x+y évalué dans (x,3);(y,1) *)
```

Fermeture récursive

La valeur de **Fix** f `->` **Fun** x `->` t est la fermeture récursive.

$$C = \langle x \bullet t \bullet E \oplus [f = C] \rangle$$

Qui est une notation pour le graphe.



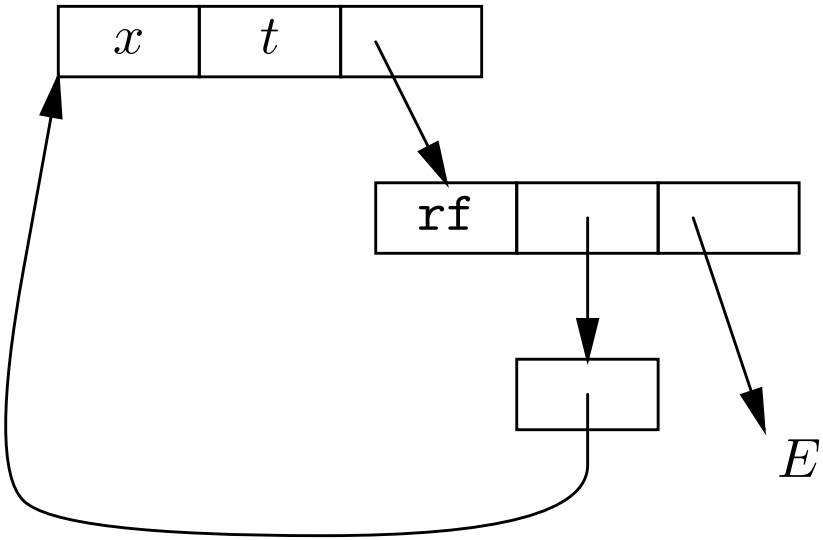
Nous pouvons fabriquer ce graphe avec une référence...

Le Fix avec le Ref

- Construire un arbre.

  Let `rf` **=** **Ref** **(Fun** `x` **->** `x`**)**

  Let `pow` **=** **Fun** `x` **->** **Ifz** `x` **Then** `1` **Else** `2` ***** `!rf` `(x-1)`



- Boucler `rf := pow`.

Appel par nom

Les règles sont parfaitement définies.

Rappel : En appel par valeur.

$$\frac{E(x) = v}{E \vdash x \hookrightarrow_v v} \qquad \frac{E \vdash t_1 \hookrightarrow_v v_1 \qquad E \oplus [x = v_1] \vdash t_2 \hookrightarrow_v v}{E \vdash \textbf{Let } x \textbf{ = } t_1 \textbf{ In } t_2 \hookrightarrow_v v}$$

$$\vdots$$

En appel par nom.

$$\frac{E(x) = \langle t \bullet E' \rangle \qquad E' \vdash t \hookrightarrow_n v}{E \vdash x \hookrightarrow_n v} \qquad \frac{E \oplus [x = \langle t_1 \bullet E \rangle] \vdash t_2 \hookrightarrow_n v}{E \vdash \textbf{Let } x \textbf{ = } t_1 \textbf{ In } t_2 \hookrightarrow_n v}$$

$$\frac{E \vdash t_1 \hookrightarrow_n \langle x \bullet b \bullet E_1 \rangle \qquad E_1 \oplus [x, \langle t_2 \bullet E \rangle] \vdash b \hookrightarrow_n v}{E \vdash (t_1\ t_2) \hookrightarrow_n v} \qquad \ldots$$

Le monde en appel par nom

Formellement rien de neuf, on conserve les règles des références.

$$\frac{E, m \vdash t \hookrightarrow v, m'}{E, m \vdash (\mathbf{Ref}\, t) \hookrightarrow r, (m' \uplus (r, v))}$$

$$\frac{E, m \vdash t \hookrightarrow r, m' \qquad (r, v) \in m'}{E, m \vdash\, !t \hookrightarrow v, m'}$$

$$\vdots$$

Ou l'alternative logique :

$$E, m \vdash (\mathbf{Ref}\, t) \hookrightarrow r, (m \uplus (r, \langle t \bullet E \rangle)) \qquad \ldots$$

Mais passons.

Et on transporte le monde.

$$\frac{E(x) = \langle t \bullet E' \rangle \qquad E', m \vdash t \hookrightarrow v, m'}{E, m \vdash x \hookrightarrow v, m'}$$

$$\frac{E \oplus [x = \langle t_1 \bullet E \rangle], m \vdash t_2 \hookrightarrow v, m'}{E, m \vdash (\mathbf{Let}\ x = t_1\ \mathbf{In}\ t_2) \hookrightarrow v, m'}$$

$$\frac{E, m \vdash t_1 \hookrightarrow \langle x \bullet b \bullet E_1 \rangle, m_1 \qquad E_1 \oplus [x, \langle t_2 \bullet E \rangle], m_1 \vdash b \hookrightarrow v, m_2}{E, m \vdash (t_1\ t_2) \hookrightarrow v, m_2}$$

$\ldots$

Un usage particulièrement délicat

```
Let x = Ref 0
Let id = Fun x -> x
Let kx = Fun y -> !x
```

Soit le terme $t =$`(x := !x+1 ; !x)`.

La valeur de `id` t est 1.

La valeur de `kx` t est 0.

Considérer maintenant :

```
Let f = Fun x -> x + x
```

Et la valeur de `f` t, qui est 3.

Les effets de bord sont retardés : en pratique c'est inutilisable car bien confus.